Séance 3 : Variables aléatoires de loi discrète

Une variable réelle dont la valeur dépend du résultat d'une expérience aléatoire est appelée variable aléatoire (v.a.). Elle est généralement désigée par une lettre majuscule.

Exemple 1 :
Supposons que nous lancions deux fois une pièce de monnaie. L'espace d'échantillonnage est $\Omega = \{FF, PF, FP, PP\}$. Soit alors X le nombre de faces possibles. A chaque point de l'espace d'échantillonnage, nous pouvons associer une valeur de X (cf tableau). X est une variable aléatoire.

échantillon	FF	FP	PF	PP
valeurs	2	1	1	0

Une v.a. qui peut prendre un nombre fini ou dénombrable fini de valeurs est dite variable aléatoire discrète. Si elle peut prendre un nombre infini non dénombrable de valeurs, elle est dite variable aléatoire continue.

Définition 1 (Variable aléatoire) *On appelle variable aléatoire discrète toute application $X : \Omega \to E$ telle que pour toute partie A de E l'ensemble $\{X \in A\}$ est un événement de Ω, et possède donc une probabilité notée $\mathbb{P}(X \in A)$.*

Définition 2
Dans le cas où l'ensemble E est totalement ordonné On appelle fonction de répartition de la v.a. X la fonction $F_X : E \to [0, 1]$ telle que pour tout $t \in E$, $F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t)$,

Propriétés :

1. F_X est croissante, et
$$\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} F_X(t) = 1.$$
2. si $a < b$,
$$\mathbb{P}(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a).$$

1 Variables aléatoires discrètes

Soit X une v.a. discrète et soient $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ses valeurs possibles, ordonnées par ordre croissant. On suppose que la probabilité de chacune de ces valeurs est :

$$\mathbb{P}(X = x_k) = f(x_k)$$

pour $k = 1, 2, 3, \ldots$

Définition 3
On définit la fonction de probabilité ou densité discrète $f(x_k)$ telle que :

1. $f(x_k) \geqslant 0$;
2. $$\sum_{x_k \in X} f(x_k) = 1$$

où la somme en (2) est prise sur toutes les valeurs possibles de X.

Exemple 2 :
(cf Exemple 1) En supposant que la pièce n'est pas truquée,

$$\mathbb{P}(FF) = \mathbb{P}(FP) = \mathbb{P}(PF) = \mathbb{P}(PP) = \frac{1}{4}$$

On écrit :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(PP) = \frac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(PF \cup FP) = \mathbb{P}(PF) + P(FP) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(FF) = \frac{1}{4}$$

La fonction de répartition d'une v.a. discrète X se déduit de la fonction de probabilité, en remarquant que

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leqslant t) = \sum_{x_k \le t} \mathbb{P}(X = x_k).$$

Remarque : Soit X une v.a. qui prend des valeurs entières positives. Dans les exercices, on est parfois amené à utiliser les astuces suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k + 1)\\ &= \mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k)\\ &= \mathbb{P}(X \leqslant k) - \mathbb{P}(X \leqslant k - 1)\\ &= \mathbb{P}(X < k + 1) - \mathbb{P}(X < k)\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X \leqslant k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = i), \quad \mathbb{P}(X \geqslant k) = \sum_{i=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i)$$

2 Exemples de distributions discrètes de probabilité

On considère des expériences telles que le lancer répétitif de pièces ou de dés, ou le tirage de boules dans une urne, chaque lancer est dit essai. Au cours de chacun des essais, chaque événement particulier (obtention d'une face, d'un 1, d'une boule rouge) est associé à une probabilité de réussite. Dans certains cas, comme dans le cas du lancer de pièce ou de dé, cette probabilité ne va pas varier d'essai en essai. Les essais de ce type sont dits essais indépendants de Bernoulli.

Loi de Bernoulli

La loi la plus simple correspond à la réalisation d'une expérience n'ayant que deux issues possibles, 1="succès" et 0="échec". La distribution d'une v.a. X prenant les valeurs 1 et 0 avec les probabilités p et $1 - p$ s'appelle la loi de Bernoulli et est notée $\mathcal{B}(1, p)$. On note que $q = 1 - p$ est la probabilité d'échec.

Cette loi se généralise dans le cas d'une répétition de n expériences de manière indépendante. Dans ce cas on aura un vecteur de 0 et 1 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ à valeur dans $\{0, 1\}^n$.

$$\mathbb{P}(X = (x_1, \cdots, x_n) = p^{\sum_{j=1}^n x_j}(1 - p)^{n-\sum_{j=1}^n x_j}.$$

Loi Binômiale

La probabilité pour que l'événement (le succès) se réalise k fois exactement au cours de n essais est donnée par la probabilité :

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

où la variable X est le nombre de succès au cours de n essais. Cette fonction de probabilité est appelée distribution binômiale, dans la mesure où, pour $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, elle correspond aux termes successifs du développement du binôme :

$$(q + p)^n = q^n + C_n^1 p^1 (1 - p)^{n-1} + C_n^2 p^2 (1 - p)^{n-2} + \ldots + p^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Elle est notée $\mathcal{B}(n, p)$

Loi multinômiale

Lorsque les résultats peuvent prendre k valeurs $x_1, \cdots, x_k$ avec la probabilité $p_1, \cdots, p_k$ et que l'on réalise n expériences, la variable X à valeur dans $\mathbb{N}^k$ comptant le nombre d'occurrences de la valeur x_i a pour loi :

$$\mathbb{P}\left(X = (n_1, \cdots, n_k)\right) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!} p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}.$$

On l'appelle loi multinômiale.

Loi géométrique

Soit la v.a. X représente le nombre d'essais de Bernoulli jusqu'à ce que le premier succès (inclus) se réalise. Ici, p est la probabilité de succès pour un essai :

$$\mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1},$$

pour $k = 1, 2, ...$ (exactement $k-1$ échecs avant le succès au k-ème essai). Elle est notée $\mathcal{G}(p)$.

Exemple 3 :

On considère un ensemble de n machines "indépendantes" assemblées selon une certaine configuration pour constituer un système dont on s'intéresse au bon fonctionnement (pour un certain cahier des charges) pour des périodes d'utilisation successives $1, 2, \ldots, k, \ldots$. On suppose que pour la i-ième machine la probabilité de panne lors d'une période donnée est p_i et que de plus les comportements de la dite machine sur les différentes périodes sont "indépendants". Soit X_i la variable aléatoire définie par le "rang de la période où se produit la première panne pour le i-ième machine". On a :

$$\mathbb{P}(X_i = k) = p_i(1-p_i)^{k-1}$$

On dit que la variable aléatoire X_i est de loi géométrique de paramètre p_i.

Loi de Poisson

Soit une X une v.a. discrète, pouvant prendre les valeurs $k = 0, 1, 2, ...$ telles que la fonction de distribution s'exprime :

$$f(k) = \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$$

avec $\lambda > 0$ donné. Cette distribution est celle de la loi de Poisson. Elle est notée $\mathcal{P}(\lambda)$.

Loi uniforme

Lorsque le cardinal de E est fini ($|E| < +\infty$), la loi uniforme est définie simplement par un argument de comptage :

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{|A|}{|E|}.$$

La densité de probabilité associée est alors constante et vaut $\frac{1}{|E|}$

3 Espérance mathématique, variance, écart-type

Définition 4

Soit X une variable aléatoire discrète numérique (i.e. $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$). Si

$$\sum_{x_k \in X(\Omega)} |x_k| \, \mathbb{P}(X = x_k)$$

converge, on appelle espérance mathématique de X le nombre :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k \, \mathbb{P}(X = x_k).$$

L'espérance mathématique de la v.a. discrète X dont les valeurs possibles sont $x_1, x_2, ..., x_n$ est définie par :

$$\mathbb{E}(X) = x_1\mathbb{P}(X = x_1) + x_2\mathbb{P}(X = x_2) + ... + x_n\mathbb{P}(X = x_n) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \, \mathbb{P}(X = x).$$

ou, de manière équivalente, si $\mathbb{P}(X = x_k) = f_X(x_k)$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \, f_X(x_k) = \sum x \, f_X(x).$$

Exemple 4 :

Si pour $x \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, avec $\lambda > 0$ fixé (Variable aléatoire de Poisson). On calcule $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \qquad (1)$$

Remarque : Lorsque toutes les probabilités sont égales (événements équiprobables), l'espérance mathématique est égale à la moyenne arithmétique, et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}.$$

De façon générale, l'espérance de X est encore appelée moyenne de X, notée μ_X ou μ.

Fonctionnelles de v.a.

Soit X une v.a., alors $Y = g(X)$ est aussi une v.a., telle que

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x:\, g(x) = y} \mathbb{P}(X = x)$$

Soit X une v.a. discrète et g une fonction réelle, on a :

1. $\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)\mathbb{P}(X = x) = \sum_x g(x) f_X(x)$
2. d'où $\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \mathbb{P}(X = x) = \sum_x x^2 f_X(x)$

4 Variance et écart type

Définition : On appelle variance de X (et on note $Var(X)$ ou $\sigma^2(X)$ ou σ_X^2) l'espérance mathématique, si elle existe, de la variable aléatoire $[X - \mathbb{E}(X)]^2$.

Propriétés : $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. En effet,

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x) \\ &= \underbrace{\sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \mathbb{P}(X = x)}_{=\mathbb{E}(X^2)} - 2\mathbb{E}(X) \underbrace{\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)}_{=\mathbb{E}(X)} + \mathbb{E}(X)^2 \underbrace{\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)}_{=1} \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \end{aligned}$$

Définition 5
On appelle écart-type de X (et on note $\sigma(X)$ ou σ_X) la quantité :

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

La variance (ou écart type) est une mesure de dispersion (ou de distribution) des valeurs de la v.a. autour de la moyenne $\mu = \mathbb{E}(X)$.

De plus,

- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$
- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ Var(aX+b) = a^2 V(X)$
- $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$
- Si X et Y sont 2 variables aléatoires quelconques,

$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

- Si de plus X et Y sont indépendantes,

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$$

et

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Définition 6
Etant données $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires discrètes à valeurs respectivement dans $\mathcal{X}_1, \ldots \mathcal{X}_n$, on dit qu'elles sont mutuellement indépendantes si pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_n$, on a :

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

5 Somme de variables indépendantes

Définition 7
Soit X et Y variables aléatoires indépendantes à valeur dans $\mathbb{N}$ et de distribution discrète respective f_X et f_Y. On appelle convolée de f_X et f_Y la densité de probabilité de $X+Y$. On la note $f_{X+Y} = f_X * f_Y$ et elle est donnée par :

$$f_{X+Y}(k) = \sum_{j=0}^{k} f_X(j) f_Y(k-j).$$

Pour traîter les problèmes liés aux convolution il est utile de travailler avec l'aide de transformées (cf les transformées de Fourier dans le cours de traîtement du signal).

Définition 8
On appelle fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{N}$ de distribution discrète $p_0, p_1, \cdots, p_n, \cdots$, la fonction G_X définie sur $|z| \leqslant 1$ par

$$G_X(z) = \mathbb{E}(t^z) = \sum_i z^i \mathbb{P}(X = i) = \sum_i z^i p_i.$$

On peut remarquer que la série est normalement convergente sur le disque unité, de plus

G_X est positive, croissante, convexe.

G_X caractérise entièrement la loi de X car les p_i peuvent être définis à partir de G_X (formule de Taylor) :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!},$$

avec $G_X^{(k)}$ la dérivée k-ième de G_X.

Les moments de X lorsqu'ils existent sont obtenus par dérivation successive de G_X en 1 :

$\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$

$Var(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$

De manière plus générale

$$G_X^{(n)}(1) = \mathbb{E}\left[X(X-1)(X-2)\cdots(X-n+1)\right].$$

Proposition 1
Soit X et Y variables aléatoires discrètes indépendantes alors

$$G_{X+Y} = G_X . G_Y$$

Loi et Notation	$X(\Omega)$	$\mathbb{P}(X=k)$	$\mathbb{E}(X)$	$Var(X)$	$G_X(z)$
Loi uniforme $\mathcal{U}(n)$	$[1,n]$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{(n-1)^2}{12}$	$z\frac{1-z^n}{1-z}$
Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$	$\{0,1\}$	$\mathbb{P}(X=1) = p$ $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$	p	$p(1-p)$	$(1-p)+pz$
Loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$	$[0,n]$	$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$((1-p)+pz)^n$
Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$z\frac{1-p}{1-pz}$
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(z-1)}$