v2.1 XI 2003

6

Quantité de mouvement
et
moment cinétique

$$p = \frac{m_0\, v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Impulsion et quantité de mouvement

Une force $\mathbf{F}$ agit sur un corps de masse m, pendant un temps Δt.
La vitesse du corps varie de $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i$
L'accélération (moyenne) vaut $\mathbf{a} = (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i) / \Delta t$
Par la deuxième loi de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i) / \Delta t \qquad \text{donc:}$$

$$\mathbf{F}\,\Delta t = m\mathbf{v}_f - m\mathbf{v}_i = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i \qquad \text{avec la définition:}$$

quantité de mouvement = $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ (un vecteur)
Le produit $\mathbf{F}\Delta t$ est appelé **impulsion** (aussi un vecteur)

La variation de la quantité de mouvement est égale à l'impulsion

$$\mathbf{F}\,\Delta t = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$$

Impulsion et quantité de mouvement, bis

Variation infinitésimale de la vitesse $d\mathbf{v}$

L'accélération (moyenne) vaut $\mathbf{a} = d\mathbf{v} / dt$

Deuxième loi de Newton:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

donc: $\mathbf{F}\, dt = m d\mathbf{v} = d\mathbf{p}$

La variation de la quantité de mouvement est égale à l'impulsion

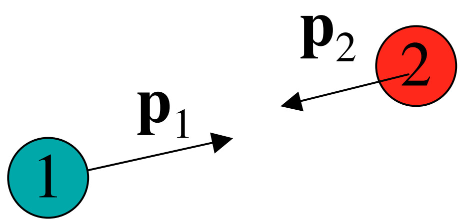
$$\mathbf{F}\, dt = m d\mathbf{v} = d\mathbf{p}$$

Conservation de la quantité de mouvement

Considérons deux corps qui effectuent un choc élastique:

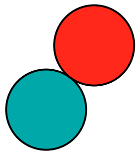
i) la quantité de mvt totale vaut $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$

i)



Supposons que la collision dure Δt.
La force que 1 exerce sur 2 est égale et opposée à celle que 2 exerce sur 1
$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$

choc)



L'impulsion sur 1 $\mathbf{F}_2\,\Delta t = \mathbf{p'}_1 - \mathbf{p}_1$

$$\mathbf{p'}_1 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{F}_2\,\Delta t = \mathbf{p}_1 - \mathbf{F}_1\,\Delta t$$

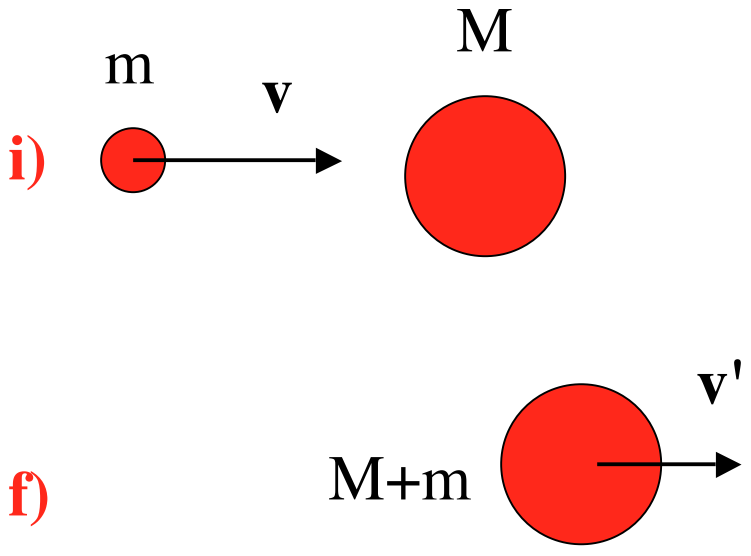
pour l'objet 2 $\mathbf{p'}_2 = \mathbf{p}_2 + \mathbf{F}_1\,\Delta t$

f)

f) la quantité de mvt totale est

$$\mathbf{p}_f = \mathbf{p'}_1 + \mathbf{p'}_2 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{F}_1\,\Delta t + \mathbf{p}_2 + \mathbf{F}_1\,\Delta t =$$
$$= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_i$$

Exemple 1



L'objet de masse M est initialement au repos.
L'objet de masse m a une vitesse v

Dans le choc "mou" M se réunit à m pour former un objet de masse M+m

On applique le principe de la conservation de la quantité de mouvement:

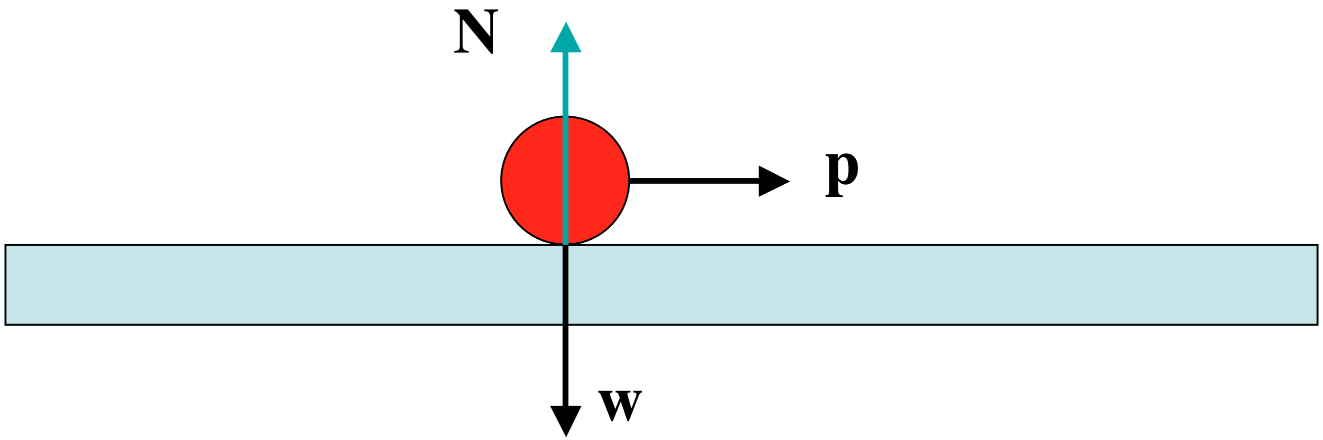
$\mathbf{p}_i = m\mathbf{v} + 0 = \mathbf{p}_f = (M+m)\mathbf{v}'$ $\qquad$ $\mathbf{v}' = m\mathbf{v}/(M+m)$

!!! Conservation de l'énergie: $mv^2/2 = (M+m)v'^2/2$

$v'^2 = mv^2/(M+m)$?????

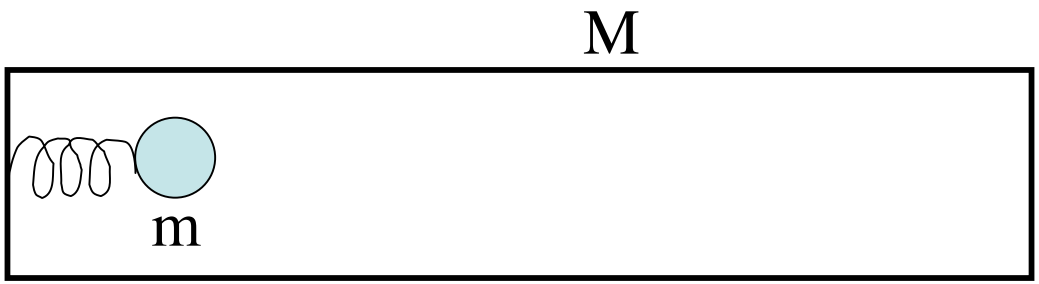
Exemple 2

Une bille qui se déplace sur une table sans frottement

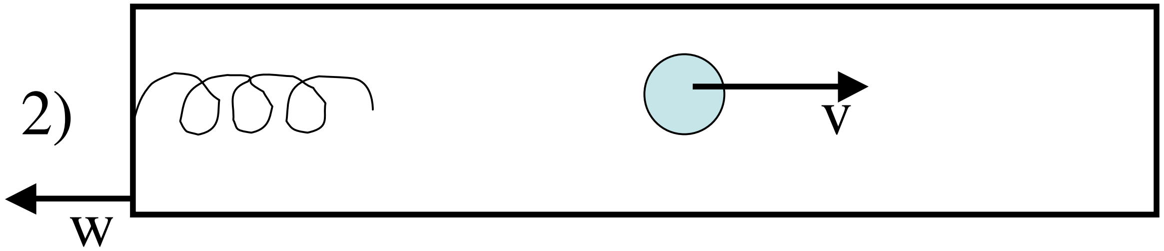


La réaction de la table **N** est égale et opposée à **w**.
La force totale est donc nulle, l'impulsion est donc aussi nulle et **p** est constant au cours du temps

Exemple 3

1) 

quantité de mvt tot
$\mathbf{p}_{tot} = 0$

2) 

$\mathbf{p}_{tot} = 0 = m\mathbf{v} + M\mathbf{w}$

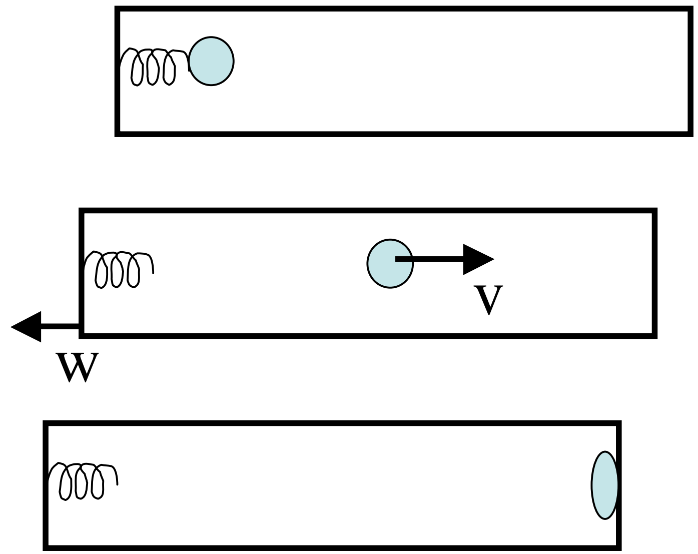
$\Rightarrow \quad \mathbf{w} = -m\mathbf{v}/M$

3) 

$\mathbf{p}_{tot} = 0$
le tout est immobile

Mouvement du Centre de Masse CM

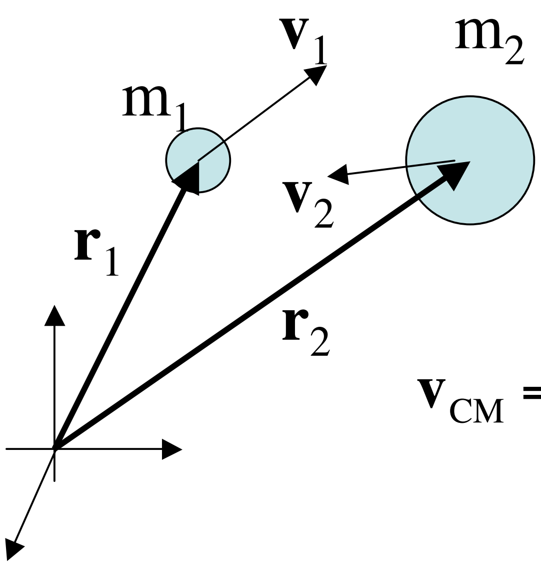
Le CM (ou Centre de Gravité CG) d'un système non soumis à des forces externes préserve son état de mouvement.



Exemple:
le CM du système
de l'Exemple 3 est
à <u>tout instant</u> immobile
dans le laboratoire.

En effet il est immobile
dans l'état initial et le système n'est pas soumis à des forces externes.

Mouvement du CM .2



CM: $\mathbf{R} = \dfrac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_r}{m_1 + m_2}$

calculons la vitesse du CM

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{d}{dt}\mathbf{R} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{1}{m_1 + m_2}\frac{d}{dt}\left(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2\right) =$$

$$= \frac{1}{m_1 + m_2}\left(\frac{d(m_1\mathbf{r}_1)}{dt} + \frac{d(m_2\mathbf{r}_2)}{dt}\right) = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2\right) =$$

$$= \frac{1}{m_1 + m_2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = \frac{\mathbf{p}_{tot}}{m_{tot}}$$

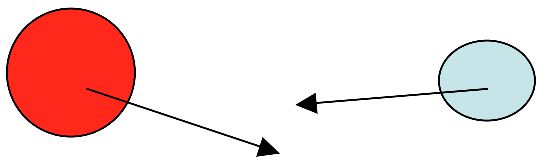
$$\boxed{\mathbf{p}_{tot} = m_{tot}\mathbf{v}_{CM}}$$

La quantité de mouvement totale est une constante, donc $\mathbf{v}_{CM}$ l'est aussi.

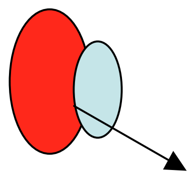
Collision élastique vs inélastique

Lors d'une collision la quantité de mouvement est conservée. L'énergie mécanique ne l'est pas toujours, si la collision n'est pas parfaitement "élastique".

Considérons la collision de deux objets isolés.
Dans le cas "totalement inélastique" il y aura un maximum de perte d'énergie cinétique



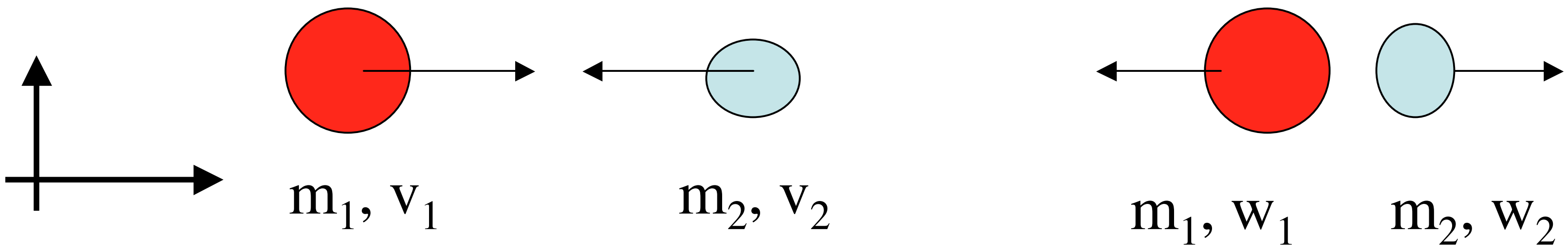
i)



f)

Collision élastique

On peut utiliser la conservation de **p** et E pour calculer l'évolution du système mécanique



$$p = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2$$

$$K_i = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) \quad = \quad K_f = \frac{1}{2}(m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2)$$

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2 \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2 \end{cases}$$

à résoudre pour les inconnues w_1 et w_2

Collision élastique .2

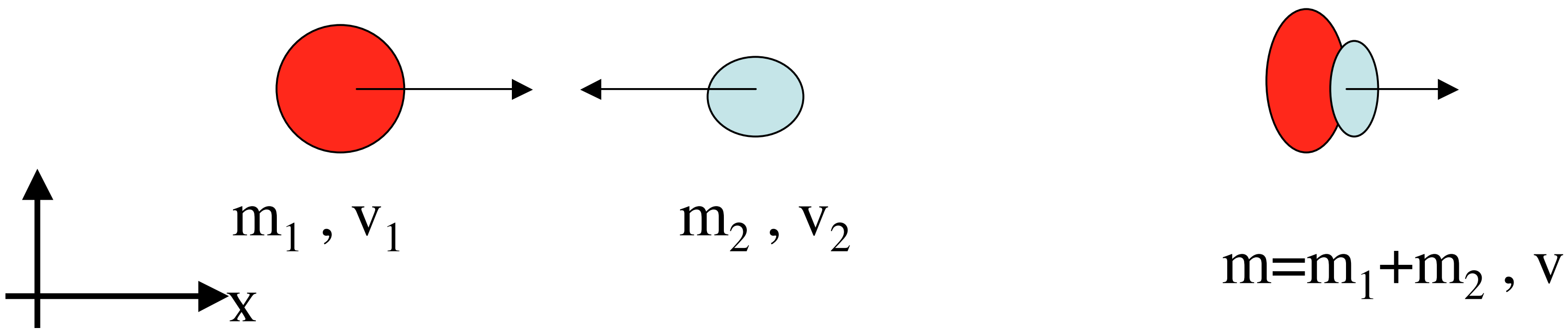
$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2 \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 w_1^2 + m_2 w_2^2 \end{cases}$$

cas particulier $v_2 = 0$

$$w_1 = v_1 \frac{1 - R}{1 + R} \qquad w_2 = v_1 \frac{2}{1 + R} \qquad R = \frac{m_2}{m_1}$$

cas particulier $v_2 = 0$ et $m_1 = m_2$ $\Rightarrow$ $w_1 = 0$ et $w_2 = v_1$

Collision inélastique



Conservation de **p**: $$p = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = mv = (m_1 + m_2)v$$

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \equiv v_{CM}$$

E cinétique:

$$K_i = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) \qquad K_f = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{[m_1 v_1 + m_2 v_2]^2}{m_1 + m_2}$$

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{\dfrac{[m_1 v_1 + m_2 v_2]^2}{m_1 + m_2}}{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2} = \frac{[m_1 v_1 + m_2 v_2]^2}{(m_1 + m_2)(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)}$$

Collision inélastique .2

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{\left[m_1 v_1 + m_2 v_2\right]^2}{\left(m_1 + m_2\right)\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2\right)}$$

Cas particulier: $v_2=0$

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{\left[m_1 v_1\right]^2}{\left(m_1 + m_2\right) m_1 v_1^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

Cas particulier: $v_1=-v_2$ et $m_1=m_2$ $K_f = 0$

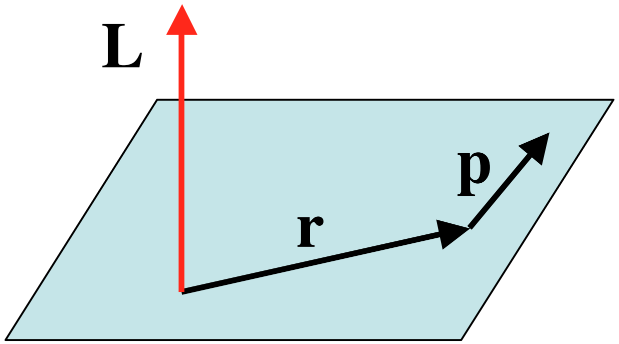
Relation énergie cinétique - quantité de mouvement

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{m}m^2v^2 = \frac{1}{2m}(mv)^2 = \frac{p^2}{2m}$$

$$\boxed{K = \frac{p^2}{2m}}$$

Moment cinétique

Le moment cinétique **L** joue un rôle analogue à la quantité de mouvement, dans le cas de la rotation.



$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$L = r\,p\,\sin\theta$$

On peut lier L à la vitesse angulaire ω et au moment d'inertie I, dans le cas d'un mvt circulaire de rayon r:

$$L = r\,p = r\,m\,v = mr\,\omega r = mr^2\,\omega = I\,\omega \qquad \mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$$

.. ce qui est l'analogue de $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$

Conservation du moment cinétique

Quand la résultante des forces agissant sur un corps est nulle, la quantité de mouvement du corps est constante

$$F = ma = m\,(v_2 - v_1)/\Delta t = (p_2 - p_1)/\Delta t$$
$$F = 0 \quad \Rightarrow \quad p_2 = p_1$$

Si l'on fait de même dans le cas d'un **mouvement circulaire**:

$$\tau = I\alpha = I\,(\omega_2 - \omega_1)/\, \Delta t = (L_2 - L_1)/\, \Delta t$$
$$\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad L_2 = L_1$$

Quand la résultante des moments des forces agissant sur un corps est nulle, le moment cinétique du corps est constant au cours du temps.

Conservation du moment cinétique bis

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\, d\mathbf{v}/dt = d\mathbf{p}/dt$$
$$\mathbf{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad dp = 0$$

De même, dans le cas d'un **mouvement circulaire**:

$$\tau = I\alpha = I\, d\omega/dt = d\mathbf{L}/dt$$
$$\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{L} = 0$$

Quand la résultante des moments des forces agissant sur un corps est nulle, le moment cinétique du corps est constant au cours du temps.

Exercices

1) Montrer que l'Energie cinétique K associée à un corps en mouvement circulaire de vitesse angulaire ω vaut

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

où I est le moment d'inertie du corps

2) Dresser une table d'analogies

mvt linéaire $\leftrightarrow$ mvt circulaire

Les vecteurs ω, L et ω ne sont pas toujours //

Ex: cylindre homogène de longueur d, rayon r et masse m.

Le moment d'inertie pour une rotation selon l'axe est $I_a = mr/3$.

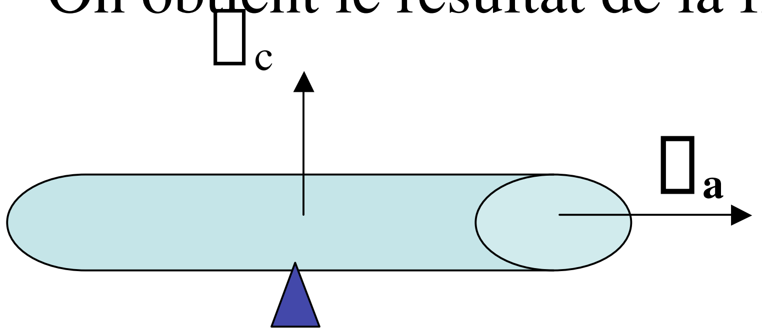
Pour une rotation autour d'un pivot central c'est $I_c = md/2$.

Si r<d on a $I_a < I_c$.

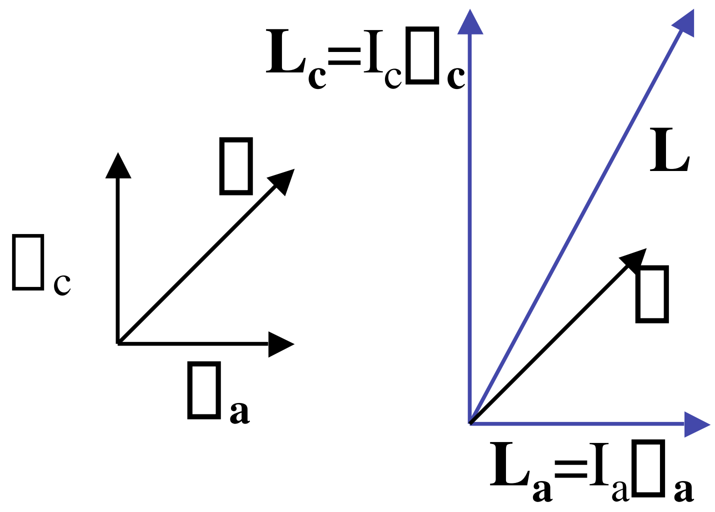
Supposons que le cylindre tourne avec vitesses angulaires $\boldsymbol{\omega_a}$ et $\boldsymbol{\omega_c}$ autour de l'axe et du pivot respectivement.

P.ex. prenons $\omega_a = \omega_c$ en module et $2I_a = I_c$

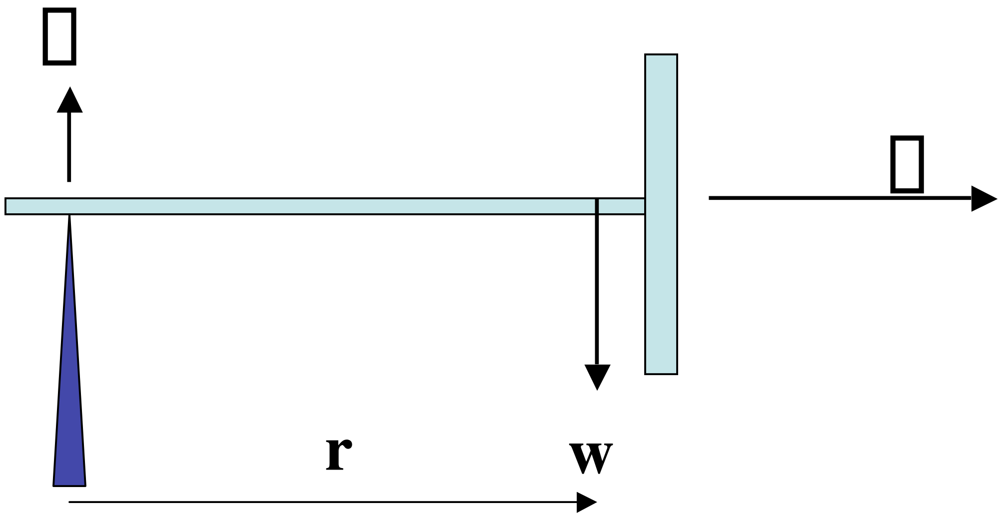
On obtient le résultat de la figure:

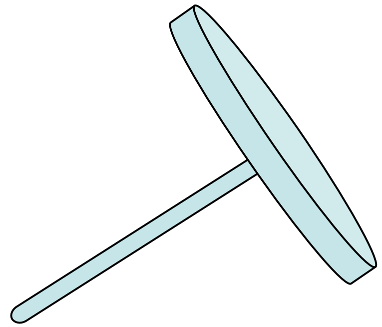


L et ω ne sont pas //



La toupie





□ rotation lente autour du pivot

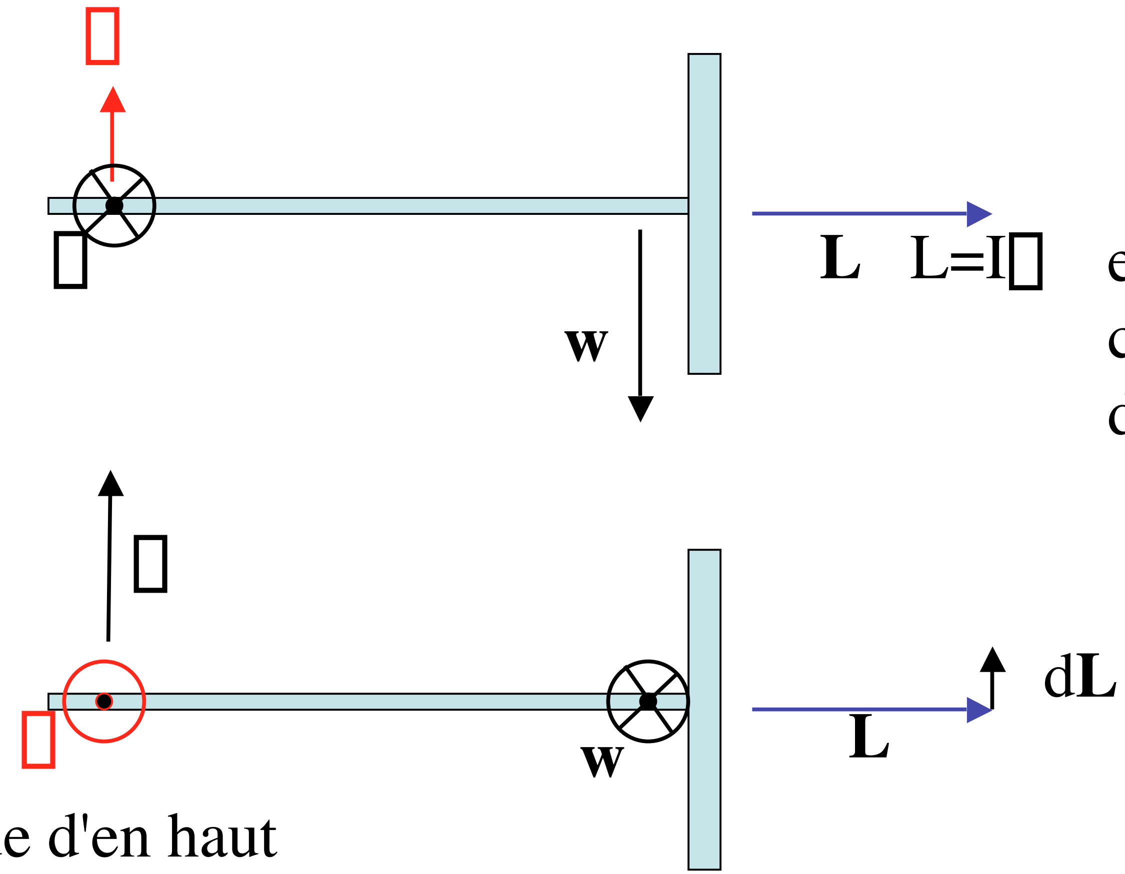
□ rotation rapide autour de l'axe

r position du CG **w** poids

On cherche la valeur de □ pour que le mvt soit stable...

Toupie .2

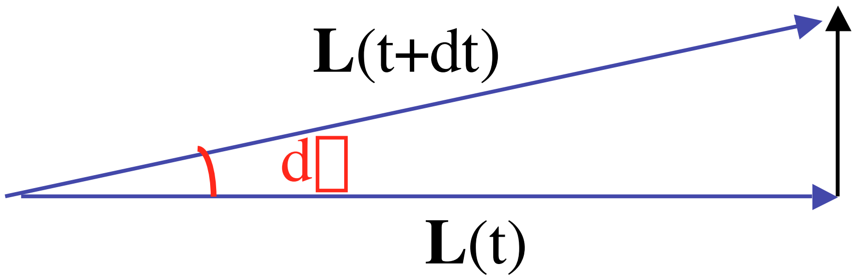
Le poids **w** produit le moment □= **r** x **w**
A tout instant **L** et □sont orthogonaux, d**L** = □dt, donc



et le module de **L** est constant au cours du temps.

□ est égal à la vitesse de rotation du vecteur **L**...

Toupie .3

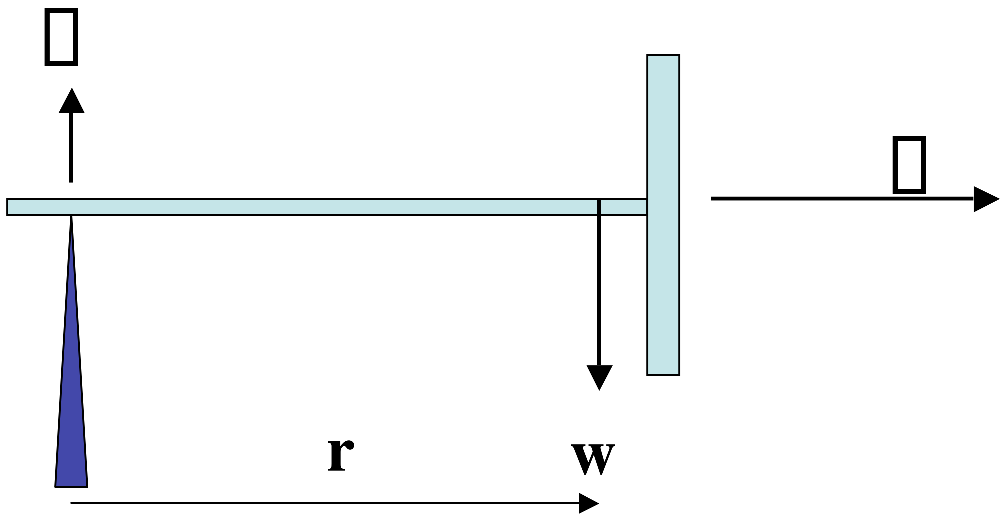


$d\mathbf{L} = \square dt$

Après dt, **L** (et □) est déplacé de l'angle d□. Cela doit correspondre au déplacement angulaire de la toupie:

$$d\square = \frac{dL}{L} = \frac{\square dt}{L} = \frac{wr\,dt}{I\square}$$

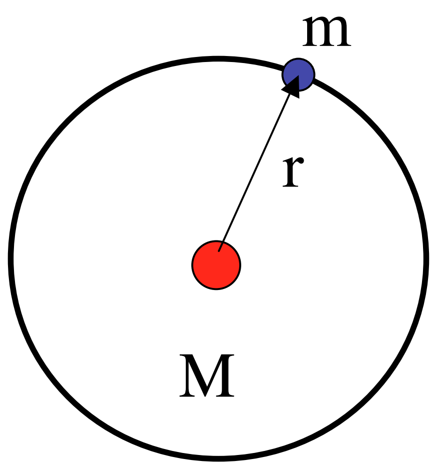
$$\square = \frac{d\square}{dt} = \frac{wr}{I\square}$$



Le modèle de Bohr pour l'H

On considère un électron de charge -e et masse m en orbite circulaire autour du proton de masse M et charge +e. On a m ~ M/2000 donc le CG est proche du proton. A l'équilibre: F centrifuge = F Coulomb:

$$k\frac{ee}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$



E cinétique: $$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{r}{2}\frac{mv^2}{r} = \frac{r}{2}k\frac{e^2}{r^2} = k\frac{e^2}{2r}$$

E potentielle: $$U(r) = k\frac{-ee}{r} = -k\frac{e^2}{r}$$

L'énergie potentielle est < 0 car le potentiel est attractif, il faut fournir du travail pour éloigner le **e^-** du **p**.

E totale: $$E(r) = K + U = k\frac{e^2}{r}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -k\frac{e^2}{2r}$$

Le modèle de Bohr pour l'H .2

Hypothèse de Bohr: les électrons sont sur des orbites telles que le moment cinétique L est un multiple de $\boxed{\hbar = h/2\pi}$:

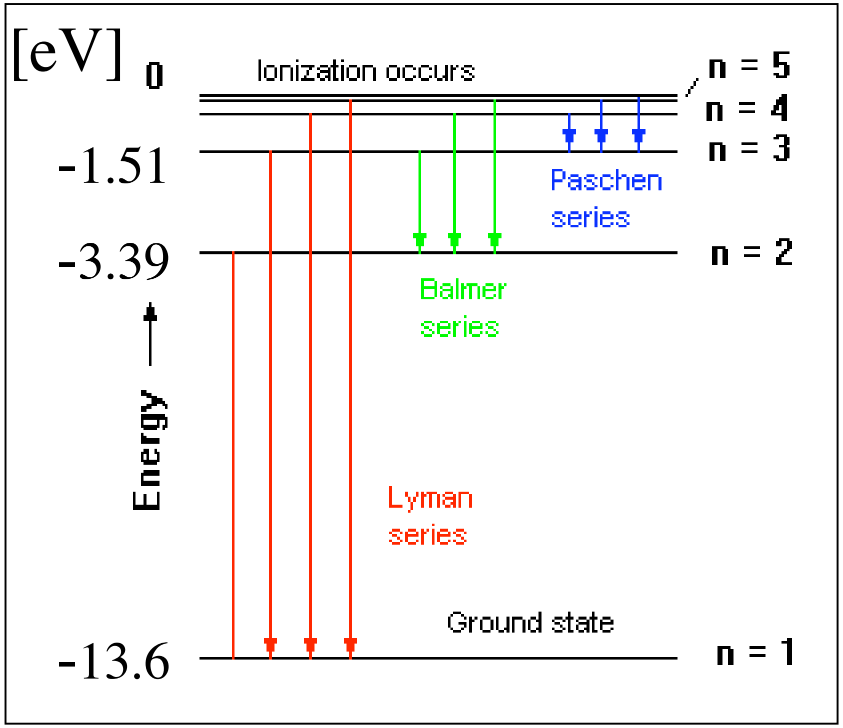
$$\boxed{L_n \equiv p_n r_n = n\hbar}$$

$$k\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \qquad ke^2 = mv^2 r = \frac{1}{mr} m^2 v^2 r^2 = \frac{L^2}{mr}$$

$$r = \frac{L^2}{mke^2}$$

$$\text{Bohr} \Rightarrow \quad L_n = m v_n r_n = n\hbar$$

$$r_n = \frac{(n\hbar)^2}{mke^2}$$



$$E(r_n) = K_n + U_n = -k\frac{e^2}{2r_n} = -\frac{k^2 e^4 m}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$$

h est la constante de Plank h=6.63 10^{-34} Js