Cours d'électromagnétisme B

Programme de deuxième semestre:

I. Rappel d'électrostatique

II. Magnétostatique

III. Aimantation

IV. Induction électromagnétique, inductances propres

V. Électrodynamique en régime stationnaires

VI. Équations de Maxwell

VII. Propagation d'ondes dans le vide

VIII. Énergie électromagnétique

IX. Radiation d'ondes électromagnétiques

Equations de Maxwell pour le régime statique

1) Théorème de Gauss E $\int_S E ds = \frac{q}{\varepsilon_0}$; $\operatorname{div} E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

2) Théorème de Gauss B $\int_S B ds = 0$; $\operatorname{div} B = 0$

3) Circulation E $\int_C E dl = 0$; $\operatorname{rot} E = 0$

4) Circulation B $\int_C B dl = \mu_0 I$; $\operatorname{rot} B = \mu_0 j$

Les potentiels en régime statique

$E = -\nabla V$; $\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$B = \operatorname{rot} A$; $\Delta A = -\mu_0 j$

Electrostatique

I. Rappel et approfondissement d'électrostatique

1. Loi de Coulomb et champ électrique
2. Énergie et potentiel électrique
3. Dipôles et multi pôles électrostatiques
4. Théorème de Gauss
5. Dipôles et multi pôles électrostatiques
6. Conducteurs
7. Polarisation et milieux diélectriques

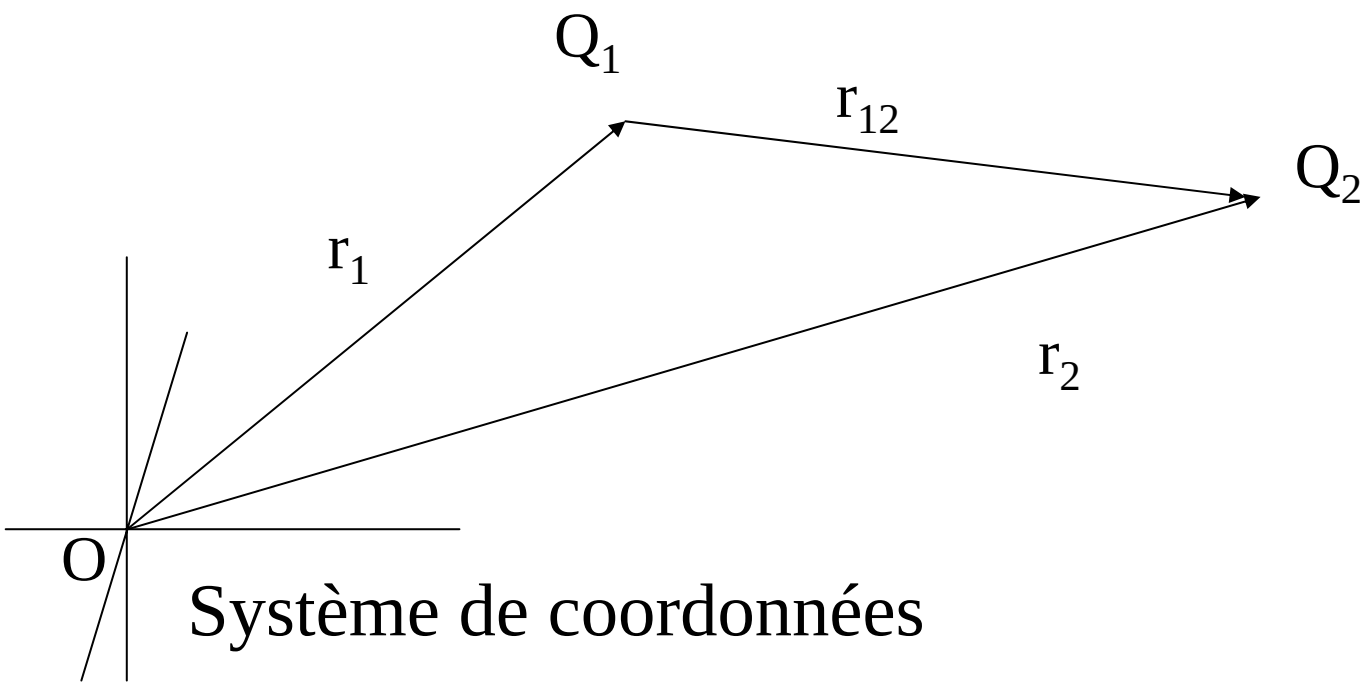
Loi de Coulomb

- Force de la charge Q_1 sur Q_2

$$F_{12}(r_{12}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} \; ; \; \hat{r}_{12} = \frac{r_2 - r_1}{\|r_2 - r_1\|}$$

$$k = 8.99\times10^9 \; \frac{Nm^2}{C^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o},$$

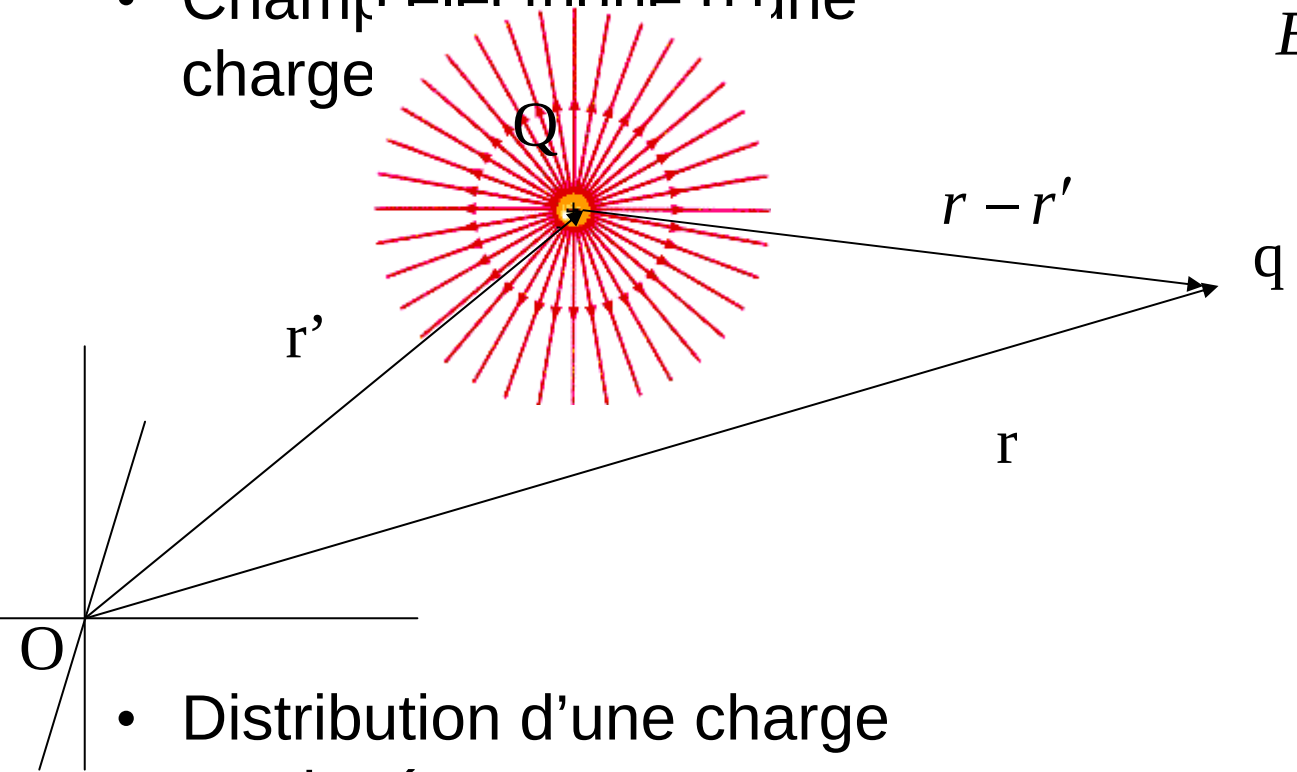
où $\varepsilon_o = 8.85\times10^{-12} \; \frac{C^2}{Nm^2}\left(\frac{F}{m}\right)$



Charges et champ électrique

- Champ électrique d'une charge

$$E(r) = k\frac{Q}{\|r - r'\|^2}\hat{r}$$



$$F = qE$$

- Distribution d'une charge continuée :

$$E(r) = k\int_V \frac{dq}{\|r - r'\|^2}\hat{r} = k\cdot\int_V \frac{\rho(r')}{\|r - r'\|^2}\hat{r}\cdot dV', \quad \text{où } \hat{r} = \frac{r - r'}{\|r - r'\|}$$

Potentiel V(r)

$$E = -\nabla V$$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(r')}{\|r-r'\|^3}(r-r')\cdot dV'$$

$$V(r) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(r')}{\|r-r'\|}\cdot dV' + \text{cte}$$

Travail effectué par le champ électrique E d'A à B

$$W_{A\to B} = \int_A^B F dl = q\int_A^B E dl\,;$$

Énergie potentielle: U=E_{pot} $\quad V(r) = U(r)/q$

$$\int_A^B E dl = -\int_A^B \nabla V dl = V_A - V_B$$

Potentiel V(r)

$$\int_A^B E dl = -\int_A^B \nabla V dl = V_A - V_B$$

$$\int_C E dl = 0; \quad \text{on dit } E \text{ est un champ conservatif}$$

$$= \int_{S(C)} \text{rot}\, E ds;$$

alors

$$\text{rot}\, E = 0$$

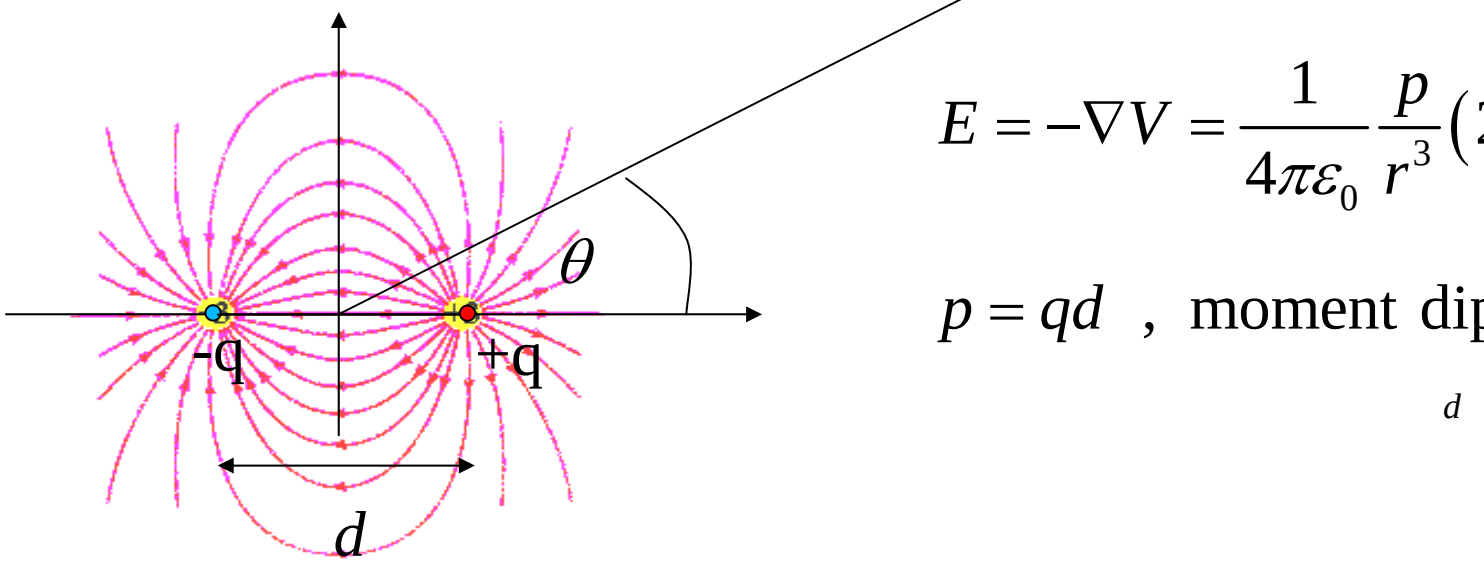
Ou direct, utilisant le produit vectoriel

$$\text{rot}\, E = \nabla \times E = \nabla \times (-\nabla V) = 0$$

Dipôle électrique

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} + \frac{-q}{r_2}\right) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pr}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

$r \quad d, \; r \approx r_1 \approx r_2$



$$E = -\nabla V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}\left(2\cos\theta\hat{e}_r + \sin\theta\hat{e}_\theta\right)$$

$p = qd$, moment dipolaire

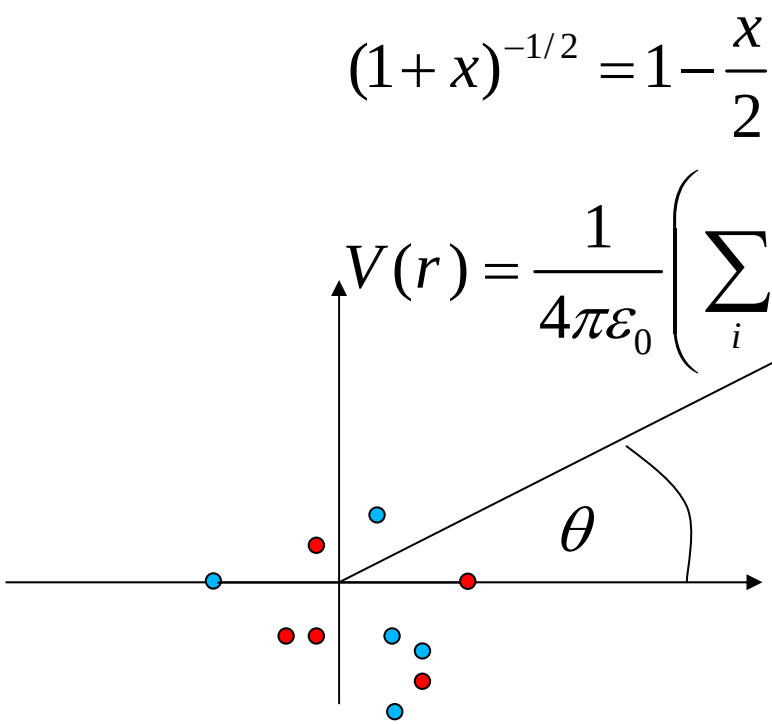
Multi-pôle électrique

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sum_i \frac{q_i}{\|r - r_i\|}\right)$$

$$\|r - r_i\| = \left\|\sqrt{r^2 - 2rr_i + r_i^2}\right\| = r^2\left\|\sqrt{1 - \frac{2rr_i}{r^2} + \frac{r_i^2}{r^2}}\right\};\quad r \qquad r_i$$

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \ldots.$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\sum_i \frac{q_i}{\|r\|} + \sum_i \frac{q_i r_i \cdot \hat{r}}{\|r\|^2} + \sum_i \frac{q_i}{\|r\|^3}\left(\frac{3}{2}\left(r_i \cdot \hat{r}\right)^2 - r_i^2/2\right).....\right)$$



Monopôle

Dipôle

Quadripôle

L'énergie électrostatique

$$V(r) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(r')}{\|r - r'\|}\cdot dV' + \text{cte};$$

$E_{pot}(r,q) = qV(r)$ Énergie d'une charge q dans le potentiel V

L'énergie électrostatique propre:

$$E_{stat} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{\|r_i - r_j\|} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2}\sum_i q_i \sum_{\substack{j \\ i\neq j}} \frac{q_j}{\|r_i - r_j\|}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i q_i V(r_i)$$

L'énergie électrostatique propre pour une distribution continuée

$$E_{stat} = \frac{1}{2}\int_V \rho V(r') d^3 r'$$

L'énergie électrostatique propre

$$E_{stat} = \frac{1}{2}\int_V \rho V(r')d^3r'$$

$$\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} E;$$

$$E_{stat} = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0 \operatorname{div} E \cdot V(r')d^3r';$$

$$\nabla\cdot(V\cdot E) = V(\nabla E) + E(\nabla V);$$

$$E_{stat} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V (\operatorname{div}(V\cdot E) - E(\nabla V))\cdot d^3r'$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{S(V)} E\cdot V\ ds + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V E^2\cdot d^3r' \xrightarrow{S(V)\to\infty} \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V E^2\cdot d^3r'$$

$$\frac{dE_{stat}}{d^3r'} = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2$$ Densité d'énergie

Théorème de Gauss

- Fux d'un champ vecteur à travers une surface

$$\Phi = \int_S E ds;$$

- Flux travers une surface fermée sans charges:

$$\Phi = \int_S E ds = 0;$$

- Flux travers une sphère avec une charge totale q à l'intérieur (exemple d'une charge ponctuelle q):

$$\Phi = \int_S E ds = \int_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} ds = \frac{q}{\varepsilon_0};$$

Indépendant de la forme précise de S!

Forme différentielle

$$\Phi = \int_S E ds = \int_{V(S)} \operatorname{div} E dV = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV;$$

$\operatorname{div} E = \rho / \varepsilon_0$ div E= flux sortant de E par unité de volume

Equation de Poisson:

$$E = -\nabla V;$$

$$\operatorname{div}(-\nabla V) = -\Delta V = \rho / \varepsilon_0 \qquad \Delta V = -\rho / \varepsilon_0$$

Equation de Laplace:

$$\rho = 0 \Rightarrow \Delta V = 0$$