

Colonne de gauche = discours tenu aux élèves, pas forcément écrit au tableau.
Colonne de droite = illustrations du propos de la colonne de gauche, écrites au tableau ou montrées sur transparents.

Voir l'*Introduction aux cours de thermodynamique* pour situer ce cours dans son contexte.

Chaleur, travail et énergie interne des gaz parfaits.

Pré-requis :
Chaleur, travail et énergie interne d'un système (cours n° 1, n°2 et n°3).

A retenir :

- * $P.V = n.R.T = m.r.T$ (R ne dépend pas du gaz alors que r en dépend).
- * $\Delta U = C_V.\Delta T$ avec C_V la capacité calorifique du G.P. à volume constant.
- * Le calcul de ΔU , W_{12} ou Q_{12} dans le cas des 4 transformations de base.

1. Le gaz parfait (ou gaz "simplifié").
L'état d'un gaz est décrit par la donnée de 3 variables P, V et T que l'on nomme "variables d'état". Ces 3 variables sont liées par la relation caractéristique :

$$\boxed{P.V = n.R.T}$$

avec :

$n \triangleq$ quantité de matière [mol]
 $R \triangleq$ constante des gaz parfaits $\approx 8,31434 \pm 0,00035 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

Cette équation est indépendante de la nature du gaz : elle est vraie pour l'O₂, le CO₂, l'hélium etc...On peut donc l'appeler "équation des gaz parfaits".

Rappel : 1 mole de gaz contient $\approx 6,0221.10^{23}$ molécules de gaz.

Dans la pratique on utilise souvent la masse d'un gaz au lieu de sa quantité de matière (moins parlante). Dans ce cas l'équation du gaz (puisque'elle dépend alors de la nature du gaz étudié) s'écrit :

$$\boxed{P.V = m.r.T}$$

avec :

$m \triangleq$ masse du gaz [kg]
 $r \triangleq$ constante thermodynamique du gaz considéré [J.K⁻¹.kg⁻¹]

Un gaz parfait est un gaz qui suit parfaitement les relations précédentes. Dans le cas contraire on a à faire à un gaz réel dont l'équation découle de celle des gaz parfaits en y incluant quelques corrections.

En fait le gaz parfait (G.P.) est le modèle simplifié à l'extrême du gaz réel étudié. Dans le cas du CO₂ on parle alors du "CO₂ parfait" qui vérifie l'équation $P.V = n.R.T$ et du "CO₂ réel" qui suit approximativement l'équation $(P + 0,36/V^2) \times (V - 4,3.10^{-5}.n) = n.R.T$.

Dans bien des cas les résultats issus de l'équation des G.P. suffisent à comprendre les phénomènes, c'est pourquoi on étudie toujours un gaz à partir de l'équation des G.P. pour prévoir son comportement global, puis on affine si nécessaire en ajoutant quelques corrections à l'équation. On peut représenter également la *surface caractéristique* d'un gaz parfait dans l'espace PVT (voir 1/2 page de droite) afin de prévoir d'un coup d'œil l'évolution d'un GP.

1. Le gaz parfait G.P. (ou gaz "simplifié").

n moles de G.P. répondent à l'équation :

$$\boxed{P.V = n.R.T}$$

avec :

$n \triangleq$ quantité de matière [mol]
 $R \triangleq$ constante des gaz parfaits $\approx 8,32 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

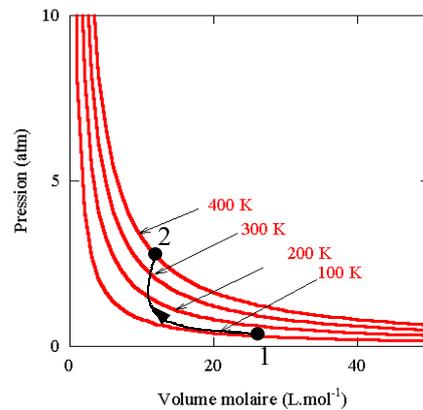
ou m kg de G.P. répondent à l'équation :

$$\boxed{P.V = m.r.T}$$

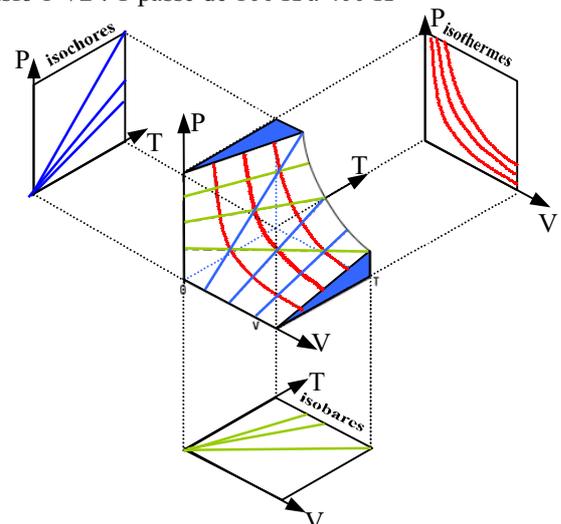
avec :

$m \triangleq$ masse du gaz [kg]
 $r \triangleq R / M$ (M =masse molaire du gaz) \triangleq constante thermodynamique du gaz considéré [J.K⁻¹.kg⁻¹]

Puisque $P = nRT/V$. Les isothermes dans le plan P(V) ont alors l'allure suivante :



Transfo 1→2 : T passe de 100 K à 400 K



2. Energie interne U d'un G.P.

On a vu qu'un corps sous forme gazeuse possédait 2 capacités calorifiques massiques (ou chaleurs massiques) différentes : C_v et C_p . Or l'expérience montre que U ne dépend que de T pour un G.P (1^{ère} loi de Joule) $\Rightarrow U = Cte \times T$. On peut donc calculer ΔU sachant qu'elle ne dépend que de ΔT : voir 1/2 page de droite.

On retiendra que

$$\Delta U = m \cdot c_v \cdot \Delta T$$

avec :

$m \hat{=}$ masse du gaz étudié [kg]

$c_v \hat{=}$ capacité calorifique massique à volume constant du gaz étudié [$J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}$]

\Rightarrow une transformation isotherme d'un G.P. est "iso-énergétique" ($\Delta U = 0$).

\Rightarrow la variation ΔU d'énergie interne d'un G.P. ne dépend que de la variation ΔT de température.

3. Conséquences pour les 4 transfo de base.

3.1. Transformation isochore ($W_{12} = 0$)

On a alors $\Delta U = Q_{12} + 0 = m \cdot c_v \cdot \Delta T \Rightarrow Q = m \cdot c_v \cdot \Delta T$ on le savait déjà, ainsi :

$$\begin{aligned} \Delta U &= m \cdot c_v \cdot \Delta T \\ Q_{12} &= m \cdot c_v \cdot \Delta T \\ W_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Remarque : il ne faut pas croire que Q_{12} ne dépend pas du trajet suivi (vu qu'elle ne dépend que de ΔT ici) car ici le trajet est rigoureusement défini : il s'agit d'une transfo isochore qui n'est pas un trajet quelconque !

3.2. Transformation isobare ($W_{12} = -P \cdot \Delta V$)

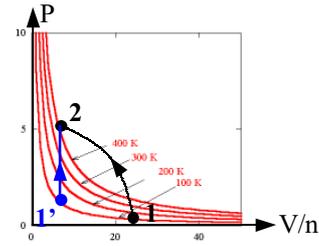
On a alors $\Delta U = Q_{12} + W_{12} \Rightarrow m \cdot c_v \cdot \Delta T = m \cdot c_p \cdot \Delta T - P \cdot \Delta V$
Ainsi :

$$\begin{aligned} \Delta U &= m \cdot c_v \cdot \Delta T \\ Q_{12} &= m \cdot c_p \cdot \Delta T \\ W_{12} &= -P \cdot \Delta V \end{aligned}$$

Note : On peut noter $C_p \hat{=}$ $m \cdot c_p$ et $C_v \hat{=}$ $m \cdot c_v$, d'où $\Delta U = C_p \cdot \Delta T - P \Delta V$ et $P = C^{te} \Rightarrow C_v \cdot \Delta T = C_p \cdot \Delta T - \Delta PV \Rightarrow C_v \cdot \Delta T = C_p \cdot \Delta T - \Delta nRT$ or $n = Cte \Rightarrow C_v \cdot \Delta T = C_p \cdot \Delta T - nR \cdot \Delta T \Rightarrow \boxed{C_p - C_v = nR}$.

Comme C_p et C_v sont caractéristiques du gaz (et non de la transformation), cette relation établie dans un cas particulier (transfo isobare) garde son caractère général pour toute transformation.

2. Energie interne d'un gaz parfait.



Transfo quelconque : trajet noir.
transfo isochore : trajet bleu.

Expérience : U ne dépend que de $T \Rightarrow \Delta U_{12} = \Delta U_{1'2}$

Or $\Delta U_{1'2} = W_{1'2} + Q_{1'2} = Q_{1'2} = m \cdot c_v \cdot \Delta T$ car 1'-2 est isochore.

d'où $\Delta U_{12} = m \cdot c_v \cdot \Delta T$ pour une transfo 1-2 quelconque

Note : on démontre que U d'un G.P. est donnée par la relation

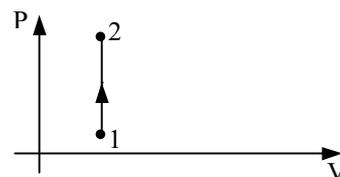
$$\begin{aligned} U &= 3/2 \cdot n \cdot R \cdot T \text{ pour un G.P. monoatomique.} \\ U &= 5/2 \cdot n \cdot R \cdot T \text{ pour un G.P. diatomique} \end{aligned}$$

Exercice :

On dispose d'une bouteille de 250 litres d'air (gaz parfait) à 10 bars. Cette bouteille est entreposée dans un local à 20°C. **Quel est le volume "utile" du gaz lorsque ce dernier est utilisé sous la pression atmosphérique normale (≈ 1 bar) dans le local à 20°C ?**

Rép : $P_1 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_1$ et $P_2 \cdot V_2 = n \cdot R \cdot T_2$ or $T_1 = T_2 (= 20^\circ C)$, donc $P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2$ d'où $V_2 = (P_1 \cdot V_1) / P_2 \approx (10 \cdot 10^5 \times 250 \times 10^{-3}) / (1 \cdot 10^5) \approx 2,5 \text{ m}^3 = 2500 \text{ litres}$.

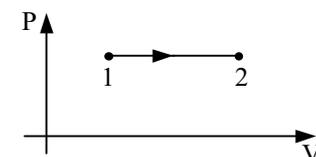
3.1. Transformation isochore ($W_{12} = 0$)



On a alors $\Delta U = Q + 0 = C_v \cdot \Delta T \Rightarrow \Delta U = C_v \cdot \Delta T$ et comme $U =$ variable d'état alors cette relation est toujours vraie.

$$\begin{aligned} \Delta U &= m \cdot c_v \cdot \Delta T \\ Q_{12} &= m \cdot c_v \cdot \Delta T \\ W_{12} &= 0 \end{aligned}$$

3.2. Transformation isobare ($W_{12} = -P \cdot \Delta V$)



3.3. Transformation isotherme ($\Delta T = 0$)

On démontre que (voir 1/2 page de droite) :

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 \\ Q_{12} &= nRT \cdot \ln(V_2/V_1) \\ W_{12} &= -nRT \cdot \ln(V_2/V_1) \end{aligned}$$

3.4. Transformation adiabatique ($Q_{12} = 0$)

$$\Delta U = Q_{12} + W_{12} \Leftrightarrow C_v \cdot \Delta T = 0 + W_{12}$$

$$\begin{aligned} \Delta U &= m \cdot c_v \cdot \Delta T \\ Q_{12} &= 0 \\ W_{12} &= -m \cdot c_v \cdot \Delta T \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} dU &= \delta Q + \delta W \Rightarrow C_v \cdot dT = -P \cdot dV \Rightarrow C_v \cdot dT = -nR \cdot T \cdot dV/V \\ \Rightarrow C_v \cdot dT/T &= (C_v - C_p) \cdot dV/V \Rightarrow C_v \times \ln(T_2/T_1) = (C_v - C_p) \times \ln(V_2/V_1) \\ \Rightarrow \ln(T_2/T_1)^{C_v} &= \ln(V_2/V_1)^{(C_v - C_p)} \Rightarrow T_2/T_1 = (V_2/V_1)^{1-\gamma} = (V_1/V_2)^{\gamma-1} \Rightarrow T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} \end{aligned}$$

On démontre donc également que :

$$\begin{aligned} T \cdot V^{\gamma-1} &= C^{te} \\ T \cdot P^{(1-\gamma)/\gamma} &= C^{te} \\ P \cdot V^\gamma &= C^{te} \end{aligned}$$

Remarque :

On démontre que le rapport des tangentes des courbes au point 1 vaut :

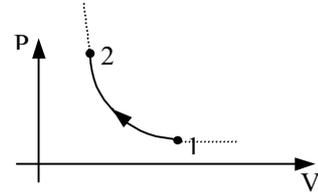
$$\frac{\text{pente de l'adiabatique}}{\text{pente de l'isotherme}} = C_p/C_v \hat{=} \gamma, \text{ or } C_p - C_v = nR \Rightarrow$$

$C_p > C_v$ (car $n > 0$ et $R > 0$) et donc $\gamma > 1$: une adiabatique est plus "raide" qu'une isotherme. $\gamma = 1,4$ pour un gaz parfait.

On a alors $\Delta U = Q_{12} + W_{12} \Rightarrow C_v \cdot \Delta T = C_p \cdot \Delta T - P \cdot \Delta V$
Ainsi :

$$\begin{aligned} \Delta U &= m \cdot c_v \cdot \Delta T \\ Q_{12} &= m \cdot c_p \cdot \Delta T \\ W_{12} &= -P \cdot \Delta V \end{aligned}$$

3.3. Transformation isotherme ($\Delta T = 0$)

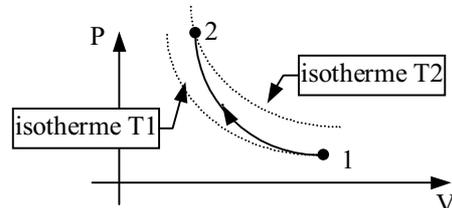


On a alors $\Delta U = Q_{12} + W_{12}$ ou $dU = \delta Q + \delta W \Rightarrow C_v \cdot dT = \delta Q - P \cdot dV \Leftrightarrow \int_T C_v \cdot dT = Q_{12} - \int_{V_1}^{V_2} \frac{nR \cdot T}{V} \cdot dV \Leftrightarrow 0 = Q_{12} - nR \cdot T \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} \cdot dV \Leftrightarrow Q_{12} = nRT \cdot \ln(V_2/V_1)$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 \\ Q_{12} &= nRT \cdot \ln(V_2/V_1) \\ W_{12} &= nRT \cdot \ln(V_1/V_2) \end{aligned}$$

3.4. Transformation adiabatique ($Q_{12} = 0$)



$$\Delta U = Q_{12} + W_{12} \Leftrightarrow C_v \cdot \Delta T = 0 + W_{12}$$

$$\begin{aligned} \Delta U &= m \cdot c_v \cdot \Delta T \\ Q_{12} &= 0 \\ W_{12} &= -m \cdot c_v \cdot \Delta T \end{aligned}$$

Avec $PV = nRT$ et notant $\gamma \hat{=} C_p/C_v$ on démontre en plus que :

$$\begin{aligned} T \cdot V^{\gamma-1} &= C^{te} \\ T \cdot P^{(1-\gamma)/\gamma} &= C^{te} \\ P \cdot V^\gamma &= C^{te} \end{aligned}$$

Comme $PV^\gamma = C^{te}$ on démontre qu'au point 1 (ou 2) :

$$\frac{\text{pente de l'adiabatique}}{\text{pente de l'isotherme}} = \gamma \text{ donc } \geq 1$$

Exercice :

On effectue une compression de 1 bar à 10 bars d' 1 litre d'air (G.P.) pris initialement à la température ambiante (20°C). Cette compression est suffisamment rapide pour que le récipient renfermant l'air n'ait pas le temps d'évacuer la chaleur. On donne $\gamma \approx 1,40$, $r \approx 287 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ et $c_v \approx 0,55 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ pour l'air.

1. **Calculer la température finale de la masse d'air.**
2. **Déduisez en son volume final et sa variation d'énergie interne.**

1.

$$T_1.P_1^{(1-\gamma)/\gamma} = T_2.P_2^{(1-\gamma)/\gamma} \Rightarrow T_2 = T_1 \times (P_2/P_1)^{(\gamma-1)/\gamma} \approx 293 \times (10.10^5/1.10^5)^{0,4/1,4} \approx 566 \text{ K} \approx 293 \text{ °C}$$

Si on place un bout de ficelle dans ce récipient, il peut s'enflammer ! Si le gaz est un mélange air - essence il s'enflamme et provoque alors un dégagement important de chaleur suivi d'une expansion (moteurs thermiques).

2.

$$P_1.V_1 = m.r.T_1 \text{ et } P_2.V_2 = m.r.T_2 \Leftrightarrow P_1.V_1/T_1 = P_2.V_2/T_2 \Leftrightarrow V_2 = (P_1.V_1.T_2)/(P_2.T_1) \approx 0,2 \text{ litres}$$

$$\Delta U = m.c_v.(T_2 - T_1) \text{ or } P_1.V_1 = m.r.T_1 \Rightarrow m = (P_1.V_1)/(r.T_1) \approx 1.10^5 \times 1.10^{-3}/(287 \times 293) \approx 1,2 \text{ g}$$

d'où $\Delta U = [(P_1.V_1)/(r.T_1)].c_v.(T_2 - T_1) \approx 1,2.10^{-3} \times 0,55 \times (566 - 293) \approx 0,2 \text{ J.}$

Exercices sur les gaz parfaits.



Exercice n°1 : quelques calculs simples.

Un volume d'air (gaz parfait) de 20 litres à la pression atmosphérique $P_0 \approx 101\,300$ Pa et à $t_0 \approx 0^\circ$ C subit les deux transformations suivantes :

transformation 1-2 : compression isochore. L'air est chauffé jusqu'à ce que sa pression soit égale à $3P_0$.
transformation 2-3 : expansion isobare. L'air est chauffé jusqu'à ce que sa température atteigne 600° C.

On donne pour l'air : masse molaire $M \approx 29$ g/mole, $C_v \approx 708$ J.K⁻¹.kg⁻¹, $\gamma \approx 1,40$ et $R \approx 8,32$ J.K⁻¹.mol⁻¹.

1. *Quelle est la température atteinte par l'air à la fin de la transformation 1-2 ?*
2. *Calculez la masse m d'air et déduisez - en la variation d'énergie interne de l'air dans la transformation 1-2.*
3. *Quel est le volume occupé par l'air à la fin de la transformation 2-3 ?*
4. *Calculez la variation d'énergie interne de l'air dans la transformation 2-3.*



Exercice n°2 : Compression et travail.

On comprime isothermiquement jusqu'à la pression de 20 bars 1m^3 d'air se trouvant initialement dans les conditions normales (rappel : $T_0 \approx 273$ K, $P_0 \approx 1013,25$ hPa). On admet que l'air se comporte comme un gaz parfait ($R \approx 8,32$ J.K⁻¹.mol⁻¹)

1. *Quel est le volume final de l'air ?*
2. *Calculez le travail de compression et la quantité de chaleur cédée par le gaz au milieu extérieur.*

La masse d'air est ramenée à la pression $P_2 \approx 1$ bar par une détente adiabatique ($PV^\gamma = \text{Cte}$ avec $\gamma \approx 1,42$ pour l'air).

3. *Déterminez le volume V_2 et la température T_2 du gaz après la détente.*
4. *Calculez le travail fourni au milieu extérieur et comparez - le au travail fourni au gaz pendant la compression isotherme. Interprétez les résultats en utilisant le diagramme de Clapeyron.*

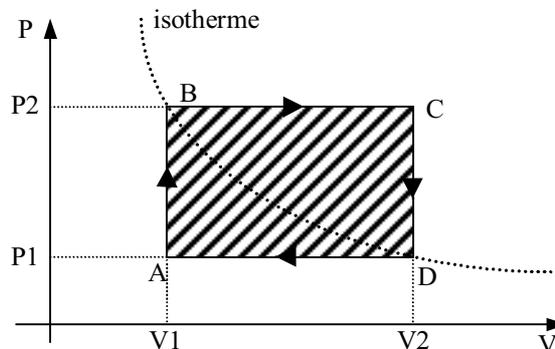


Exercice n°3 : cycle, travail et chaleur.

Une certaine masse d'air est enfermée dans un corps de pompe dans les conditions initiales (point A en coordonnées de Clapeyron) $P_1 \approx 1$ bar, $V_1 \approx 0,010$ m³, $T_1 \approx 273$ K. On lui fait subir une série de transformations représentées par le rectangle ABCD ci - dessous. L'ordonnée de B est $P_2 = 2P_1$, l'abscisse de D est $V_2 = 2V_1$.

On donne :

- chaleur massique de l'air à pression constante : $C_p \approx 992$ J.K⁻¹.kg⁻¹ ;
- constante des gaz parfaits $R \approx 8,31$ J.K⁻¹.mol⁻¹.
- $C_p/C_v \equiv \gamma \approx 1,42$;
- Masse molaire de l'air $M \approx 29$ g/mole.



1. *Calculez le travail échangé au cours du cycle ABCD.*
2. *Déterminez la température de l'air dans les états B, C et D.*
3. *Calculez la masse d'air m mise en jeu et déduisez - en les quantités de chaleur mises en jeu pendant les transformations AB, BC, CD et DA.*