دستور تيلور Formule de Taylor

C'est une généralisation de la formule des accroissements finis à des fonctions ayant des dérivées d'ordre supérieur.
Soit f une fonction de classe C^n sur I. On suppose que les dérivées d'ordre (n+1) existent.
Pour tous x et x_0 de I, il existe un point c entre x et x_0 tel que :

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)^2.\frac{f''(x_0)}{2}+......+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Ce dernier terme est appelé reste d'ordre n et il vaut ici :

$$R_n(x,x_0)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Il existe d'autres formulations du reste tel que le reste intégral.
Preuve : Définissons la fonction :

$$g(x)=f(x)-\left[f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+...+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0)\right]-K\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où la constante K est choisie telle que g(b)=0.
On a alors : $g(a)=g'(a)=...=g^{(n)}(a)=0$.
La fonction g s'annule pour x=a et x=b. Elle vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. Il existe donc $c_1\in]a,b[$ *tel que :* $g'(c_1)=0$.
La fonction g' s'annule pour x=a et x=c_1. Elle vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. Il existe donc $c_2\in]a,c_1[$ *tel que :* $g''(c_2)=0$.
De même la fonction $g^{(n)}$ *s'annule pour x=a et x=c_n. Elle vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. Il existe donc c tel que :* $g^{(n+1)}(c)=0$ *c'est à dire* $f^{(n+1)}(c)=K$, *ce qui finit la démonstration.*

Exemple : la fonction e^x *admet des dérivées de tout ordre et* $(e^x)^{(n)}=e^x, \forall n$
Donc $\forall n, \forall x, x_0 \in IR$:

$$e^x=e^{x_0}+e^{x_0}\frac{(x-x_0)}{1}+e^{x_0}\frac{(x-x_0)^2}{2!}+.........+e^{x_0}\frac{(x-x_0)^n}{n!}+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

$$=e^{x_0}\left[1+\frac{(x-x_0)}{1}+\frac{(x-x_0)^2}{2!}+.........+\frac{(x-x_0)^n}{n!}\right]+\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}e^c$$

on obtient un autre énoncé de la formule de Taylor en posant $x-x_0=h$ *et tout nombre c compris entre x et x_0 s'écrit :* $c=x_0+\theta.h$, $0<\theta<1$:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+h.f'(x_0)+...+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n)}(x_0+\theta.h),\ 0<\theta<1$$

Formule de (Mac Laurin):
C'est un cas particulier de la formule de Taylor lorsque $x_0=0$. Son intérêt est que au voisinage de 0 on l'utilise dans les calculs d'approximation car on peut négliger le reste.

Exemples : - $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}\frac{e^c}{(n+1)!}$

- $f(x) = \frac{1}{1-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \dots\dots\dots\dots, f^{(n)}(x) = \frac{(n!)}{(1-x)^{n+1}}$

Et donc si $x_0 = 0$; $|x| < 1$, *on a :*

$$\frac{1}{1-x} = f(x_0) + \dots\dots + f^{(n)}(x_0).\frac{(x-x_0)^n}{n!} + R_n(x) = 1 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \dots\dots + \frac{n!}{n!}x^n + R_n(x)$$

et finalement, on obtient la relation :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots + x^n + R_n(x)$$

Et en remplaçant x par (-x) :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots\dots + (-1)^n x^n + R_n(x)$$

Exemple2 : laissé à titre d'exercice :

$$\forall x \in R \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x)$$

$$\forall x \in R \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x)$$

Exemple3 : application au calcul approximatif (حساب تقريبي)
en négligeant le reste de la fonction e^x, *on obtient :*

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots\dots + \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^3 \approx 1 + 3 + \frac{3^2}{2} + \dots\dots + \frac{3^6}{6!}$$

et en pratique, la calculatrice ne donne qu'une valeur approximative.

Développements limités المحدودة النشور

Introduction :

Pour le calcul de certaines limites, il est préférable d'utiliser ces développements plutôt que la formule de Taylor. Il y a aussi beaucoup d'opérations possibles sur ces développements.

Définition 22 : Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0. *On dit que f est négligeable* للإهمال قابلة *devant g et on écrit f=o(g) si :* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Remarque : dans le cas général on prendra $g(x) = (x - x_0)^n$ *c'est à dire qu'on comparera f avec un monôme. En particulier si* $x_0 = 0$, *on écrit :* $f = o(x^n)$.

Exemple : $f(x) = x, g(x) = x^2 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \Rightarrow g = o(f) \\ x_0 = \infty \Rightarrow f = o(g) \end{cases}$.

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE

Faculté des Sciences

MATHÉMATIQUES

TABLE DES DÉRIVÉES

FONCTION $f(x)$	DÉRIVÉE $f'(x) = \frac{dy}{dx}$
$a.u + b.v$	$a.u' + b.v'$
$u.v$	$u'.v + u.v'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{v.u' - u.v'}{v^2}$
$(\frac{1}{f(x)})'$	$\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$
$f(u(x))$	$f'(u(x)).u'(x)$
$y = f(x),\ x = f^{-1}(y)$	$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$
$ax + C$	a
x^n $n \in \mathbb{Z}$	$n.x^{n-1}$
x^{α} $x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha.x^{\alpha-1}$
u^n ; $n \in \mathbb{Z}$	$n.u^{n-1}.u'$
u^{α} ; $u(x) > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha.u^{\alpha-1}.u'$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
tgx	$1 + tg^2x = sec^2x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$cotgx = \frac{1}{tgx}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$Log\lvert x \pm a\rvert$ $x \neq \mp a$	$\frac{1}{(x \pm a)}$
e^x	e^x
$e^{a.x}$	$a.e^{a.x}$

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE

Faculté des Sciences

MATHÉMATIQUES

TABLE DES DÉRIVÉES (suite)

FONCTION $f(x)$	DÉRIVÉE $f'(x) = \frac{dy}{dx}$
$Arctgx$	$\frac{1}{1 + x^2}$
$Arctg \frac{x}{a}$	$\frac{a}{x^2 + a^2}$
$Arcsinx$	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$Arcsin \frac{x}{a}$, $a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
shx	chx
chx	shx
$thx = \frac{shx}{chx}$	$\frac{1}{ch^2x} = \frac{4.e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2}$
$Argshx = sh^{-1}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$
$Argsh \frac{x}{a}$, $a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$
$Argchx = ch^{-1}(x)$, $x > 1$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$Argch \frac{x}{a}$, $x > a > 0$	$\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$
$Argthx = th^{-1}x$	$\frac{1}{1 - x^2}$
$Argth \frac{x}{a}$	$\frac{a}{a^2 - x^2}$