CALCUL INTÉGRAL

I) Définition

<u>Définition 1</u> *Intégrale au sens de Newton*

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné I.

Soient a et b deux réels dans I.

Soit F une primitive de f sur I.

On appelle intégrale de a à b de f le nombre réel noté $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et défini par :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

<u>Notation pratique</u> : $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left[F(t)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

<u>Exemples</u> :

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t = \left[\sin t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$\int_0^1 \mathbf{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[\mathbf{e}^t\right]_0^1 = \mathbf{e} - 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^1 \mathbf{e}^t\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty} \left[\mathbf{e}^t\right]_x^1 = \lim_{x\to-\infty} (\mathbf{e} - \mathbf{e}^x) = \mathbf{e}$$

(Cette limite existant, on la note alors $\int_{-\infty}^1 \mathbf{e}^t\,\mathrm{d}t$)

$$\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\int_1^x \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t = \int_1^x t^{-n}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-n}}{1-n}\right]_1^x = \frac{1}{1-n}\left[\frac{1}{x^{n-1}} - 1\right]$$

$$\int_2^{\mathbf{e}} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}t = \int_2^{\mathbf{e}} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,\mathrm{d}t = \left[\ln(\ln t)\right]_2^{\mathbf{e}} = -\ln(\ln 2)$$

<u>Commentaires</u> :

Le choix de la primitive F n'influe pas le résultat de l'intégrale. En effet, si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur I, alors elles différent d'une constante. Les quantités $F(b) - F(a)$ et $G(b) - G(a)$ sont donc égales.

La variable t (ou x) figurant dans l'intégrale est "muette" ; elle peut être notée par toute autre lettre. Le symbole dt (ou dx) ne joue, à notre niveau aucun rôle, son sens sera précisé ultérieurement.

<u>Remarque importante</u> : soit I un intervalle $[a\,;\,b]$ et $x_0 \in I$.

Pour tout réel x de I, nous avons : $$\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(x_0)$$

La fonction $\mathscr{F}$ définie sur I par $\mathscr{F}(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc LA primitive de f sur I qui s'annule en x_0.

On a donc $\mathscr{F}$ continue sur I (car dérivable sur I puisque $\mathscr{F}' = f$). Une primitive est donc une fonction continue, dérivable à dérivée continue...

Exemple : $$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln t]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

On retrouve ainsi le fait que la fonction ln est LA primitive de la fonction inverse s'annulant en 1.

II) Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné I. Alors :

$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \int_a^b \mathrm{d}t = [t]_a^b = b - a$$

Relation de Chasles : pour tous réels a, b et c de I : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration : $F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a)$

Linéarité : $\int_a^b \big(f(t) + g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b k f(t)\,\mathrm{d}t = k\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ($k \in \mathbb{R}$)

Démonstration : $(F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) = (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a))$ et $kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a))$

Positivité : Si f est continue et positive sur $[a\,;b]$ avec $a \leqslant b$, alors : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$

Démonstration : Puisque f est positive sur $[a\,;b]$, il en découle que F est croissante sur ce même intervalle, donc $F(b) - F(a) \geqslant 0$.

Remarque : si f est positive sur $[a\,;b]$ (avec $a < b$) et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, on a alors F strictement croissante donc $F(b) - F(a) > 0$.

Compatibilité avec l'ordre (intégration d'une inégalité) : Si f et g sont continues sur $[a\,;b]$ avec $a \leqslant b$ et si $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

Démonstration : Puisque $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$, on a $g - f \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$. D'après la positivité, il vient $\int_a^b \big(g(t) - f(t)\big)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Puis, en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Application : une démonstration de l'inégalité des accroissements finis :

> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
> S'il existe un réel M tel que $|f'| \leqslant M$ sur I alors :
> pour tous réels a et b de I, on a : $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b - a|$

Pour $a < b$, on a :

$$|f(b) - f(a)| = \left|\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M(b - a) \leqslant M|b - a|$$

Pour $a > b$, on a :

$$|f(b) - f(a)| = \left|\int_b^a f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_b^a |f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M(a - b) \leqslant M|b - a|$$

Inégalité triangulaire : Si f est continue sur $[a\,;b]$ avec $a \leqslant b$, alors : $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$

Démonstration : on utilise la propriété précédente avec : $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ sur $[a\ ;\ b]$. En intégrant entre a et b ($a \leqslant b$), on obtient : $-\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ d'où : $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$

(Pour une application de cette inégalité triangulaire, voir, par exemple, la démonstration de l'inégalité des accroissements finis dans la leçon sur le calcul différentiel)

<u>Exemple d'utilisation de la relation de Chasles</u> : divergence de la série harmonique.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Soit $n \geqslant 2$. Comme l'application $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $]0\ ;+\infty[$, on a, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$$

En sommant, pour k allant de 1 à n, la relation de Chasles donne :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

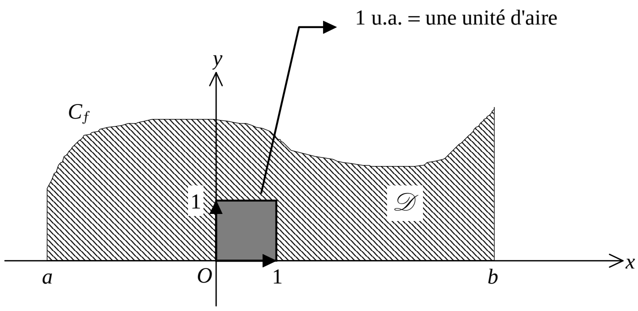
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, donc la suite (u_n) diverge.

III) Calcul d'aires

Soit f une fonction continue et **positive** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$. On s'intéresse aux point $M(x\ ;\ y)$ dont les coordonnées sont telles que $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

L'ensemble des points M correspond au domaine $\mathscr{D}$ du plan délimité par les deux droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$, la courbe C_f et l'axe des abscisses.

Comment calculer l'aire A du domaine $\mathscr{D}$?



<u>Théorème 1</u>

Soit f une fonction continue et **positive** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

L'aire A du domaine défini par : $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$

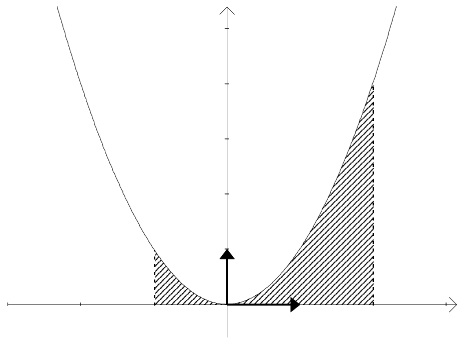
se calcule par : $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ u.a.

<u>Exemple</u> :

Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 3 cm pour l'axe $(O, \vec{i})$ et 2 cm pour l'axe $(O, \vec{j})$), on considère la parabole C_f représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Calculer l'aire A en cm^2 du domaine suivant :

$$D = \{M(x\ ;\ y) \text{ tels que } -1 \leqslant x \leqslant 2\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$



D'après le théorème :

$$A = \int_{-1}^{2} x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3 \text{ u.a.}$$

Or, l'aire unité mesure $3 \times 2 = 6$ cm^2.

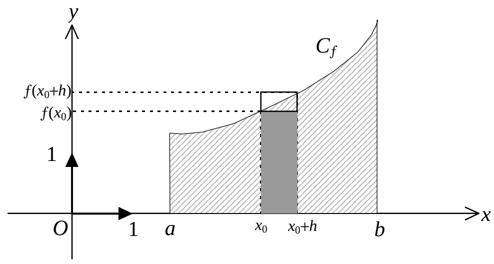
Nous avons donc $A = 18$ cm^2.

<u>Démonstration du théorème</u> :

Considérons le cas d'une fonction continue, croissante et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$:

Pour tout réel x_0 de l'intervalle $[a\,;\,b]$, notons $S(x)$ l'aire limitée par le domaine suivant :

$$\{M(x\,;\,y) \text{ tels que } a \leqslant x \leqslant x_0 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$



Pour tout $h > 0$, étudions la quantité $S(x_0 + h) - S(x_0)$.

C'est une aire encadrée par les aires de deux rectangles :

$$h\,f(x_0) \leqslant S(x_0 + h) - S(x_0) \leqslant h\,f(x_0 + h)$$

$$f(x_0) \leqslant \frac{S(x_0+h) - S(x_0)}{h} \leqslant f(x_0 + h)$$

Nous avons ainsi un encadrement de l'accroissement moyen de S en x_0. Passons à la limite lorsque h tend vers 0 :

$$f(x_0) \leqslant \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{S(x_0+h) - S(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$$

Si $h < 0$, on a en fait le même encadrement :

En effet : $-h\,f(x_0) \leqslant S(x_0) - S(x_0 + h) \leqslant -h\,f(x_0 + h)$ (faire une figure pour s'en convaincre)

En divisant par $-h > 0$: $f(x_0) \leqslant \dfrac{S(x_0+h) - S(x_0)}{h} \leqslant f(x_0 + h)$

D'où :

$$f(x_0) \leqslant \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{S(x_0+h) - S(x_0)}{h} \leqslant f(x_0)$$

Dans les deux cas, d'après le théorème des gendarmes, la limite de l'accroissement moyen existe et est finie. La fonction S est donc dérivable en tout point x_0 de $[a\,;\,b]$ et : $S'(x_0) = f(x_0)$ pour tout $x_0 \in [a\,;\,b]$.

La fonction S est donc une primitive de la fonction f. En outre, la fonction S s'annule en a. D'après la remarque importante du paragraphe 1, on en déduit que : $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in [a\,;\,b]$.

Et lorsque $x = b$, on obtient le théorème.

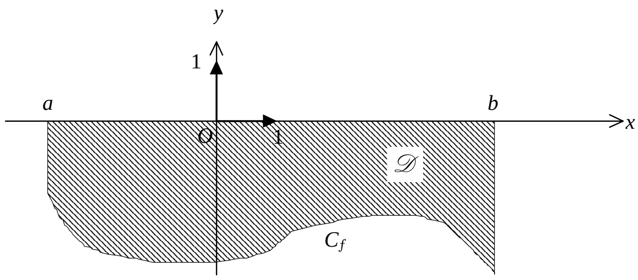
<u>Remarque</u> : on a donc démontré que toute fonction continue, positive et croissante admet des primitives !

Le cas des fonctions continues, positives et décroissantes s'étudie de manière analogue.

Le cas des fonctions continues et positives et non monotones s'obtient par découpages (correspondants aux sous-intervalles sur lesquels la fonction est monotone) et en utilisant la relation de Chasles.

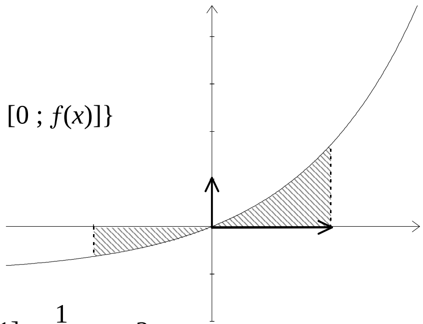
Cas d'une fonction négative :

Si on calcule $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, on obtient une quantité négative... Si on veut obtenir l'aire, il faut changer le signe : $A = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.



Cas d'une fonction changeant de signe :

On se ramène aux cas précédents en découpant l'intervalle $[a\,;\,b]$ en sous-intervalles sur lesquels la fonction garde un signe constant.



Exemple : on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathbf{e}^x - 1$.

Calculer l'aire A du domaine suivant : $D = \{M(x\,;\,y)$ tels que $-1 \leqslant x \leqslant 1\,;\, y \in [0\,;\, f(x)]\}$

Il est clair que $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$. On a donc :

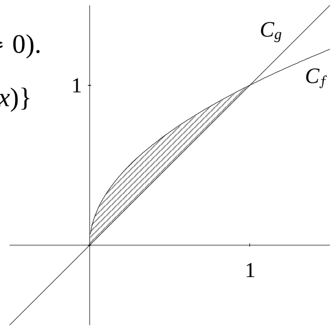
$$A = -\int_{-1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = -\left[\mathbf{e}^x - x\right]_{-1}^{0} + \left[\mathbf{e}^x - x\right]_0^1$$

$$A = -[(\mathbf{e}^0 - 0) - (\mathbf{e}^{-1} - (-1))] + [(\mathbf{e}^1 - 1) - (\mathbf{e}^0 - 0)] = -[1 - \frac{1}{\mathbf{e}} - 1] + [\mathbf{e} - 1 - 1] = \frac{1}{\mathbf{e}} + \mathbf{e} - 2 \text{ u.a.}$$

Calcul de l'aire située entre deux courbes :

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x$. (Pour $x \geqslant 0$).

Calculer l'aire A du domaine $D = \{M(x\,;\,y)$ tels que $0 \leqslant x \leqslant 1\,;\, g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$



$$A = \int_0^1 \big(f(t) - g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{t} - t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ u.a.}$$

(Différence entre la fonction la plus grande et la fonction la plus petite)

Exercice :

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = -x + 5 - 2\dfrac{\ln x}{x}$. On note C_f son graphe.

1. Démontrer que C_f admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$ dont on précisera son équation ainsi que sa position par rapport à C_f.
2. Étudier les variations de f. (On étudiera le signe de $g : x \longmapsto -x^2 - 2 + 2\ln x$)
3. Calculer une primitive F de f et déterminer l'aire A (en u.a.) du domaine :

$\{(x\,;\,y)$ tels que $1 \leqslant x \leqslant \mathbf{e}$ et $f(x) \leqslant y \leqslant -x + 5\}$ (Réponse : $\left[(\ln x)^2\right]_1^{\mathbf{e}} = 1$)

IV) Parité et périodicité

> Théorème 2 (Parité)
>
> Soit f une fonction continue sur un intervalle symétrique $[-a\,;\,a]$.
>
> - Si f est paire alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$.
> - Si f est impaire alors $\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

> Théorème 3 (Périodicité)
>
> Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Alors, pour tout réel a :
>
> $$\int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstrations :

Relation de Chasles puis changement de variable ($x = -t$) pour la parité.

Périodicité : encore d'après la relation de Chasles :

$$\int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{T}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

En posant $u = t - T$, dans la troisième intégrale, on obtient ($\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$) : $\int_{T}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(u+T)\,\mathrm{d}u$

Et comme f est T-périodique : $f(u + T) = f(u)$ pour tout u, d'où $\int_{0}^{a} f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{d}u$

Et finalement : $\int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t$

Exemple : $\int_{-1}^{1} \frac{x^{92}(\cos x)^{27}\sin x}{(x^2+1)^{28}}|x|\,\mathrm{d}x = 0$.

V) Valeur moyenne d'une fonction. Inégalité de la moyenne

La question initiale : soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$. Existe-t-il une fonction constante égale à μ telle que $\int_{a}^{b}\mu\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$? La réponse est oui ; la constante se détermine ainsi :

$$\mu(b-a) = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ d'où } \mu = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans la cas d'une fonction f positive, on a donc l'interprétation graphique suivante :

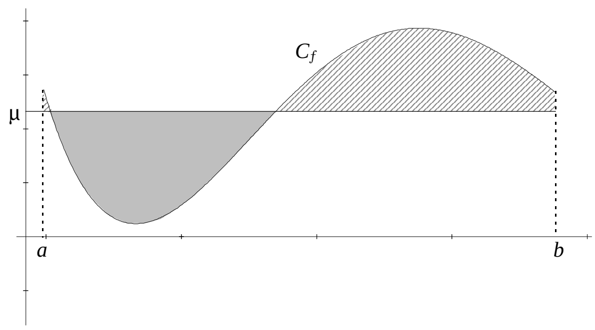
les aires des deux domaines suivants sont égales :

$D = \{M(x\,;\,y)$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)\ \}$

$D' = \{M(x\,;\,y)$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant \mu\ \}$

Conséquence : $\int_{a}^{b}\big(f(t)-\mu\big)\,\mathrm{d}t = 0$

(En effet, $\int_{a}^{b}\big(f(t)-\mu\big)\,\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t - \mu(b-a)$)



Définition 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$.

On appelle valeur moyenne de f sur l'intervalle I le nombre réel μ défini par : $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

On note souvent $\overline{f}$ au lieu de μ.

Exemple : Soit f le signal sinusoïdal 2π-périodique défini par : $f(t) = \sin t$.

Calculer la moyenne $\overline{f}$ sur $[0\ ;\ 2\pi]$ ainsi que la moyenne quadratique $\sqrt{\overline{f^2}}$ sur $[0\ ;\ 2\pi]$.

$$\overline{f} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin t\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\overline{f^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} 1-\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\left[t\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \text{ d'où } \sqrt{\overline{f^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Lien avec l'électricité :

On appelle intensité efficace I_{eff} d'un courant alternatif, l'intensité d'un courant continu (on devrait plutôt dire "constant") qui produirait, à travers la même résistance R, le même effet calorifique pendant la durée d'une période T. Dans le cas d'un courant de type sinusoïdal :

si $I(t) = I_{\max}\sin(\omega t)$ est l'intensité du courant à l'instant t du courant alternatif, la loi de Joule donne :

$$E(T) = R\,I_{\text{eff}}^2\,T = \int_0^T RI^2(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où : $I_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T I_{\max}^2\sin^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{I_{\max}^2}{2T}\displaystyle\int_0^T 1-\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{I_{\max}^2}{2T}\left[t\right]_0^T = \dfrac{I_{\max}^2}{2}$

D'où la relation : $I_{\max} = \sqrt{2}\,I_{\text{eff}}$.

Théorème 4 (inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$. Soit m et M des réels tels que : $m \leqslant f \leqslant M$. Alors :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$$

Le nom de ce théorème est légitime, en effet, on peut le reformuler ainsi : si $m \leqslant f \leqslant M$ alors $m \leqslant \mu \leqslant M$.

Comme le théorème de l'inégalité des accroissement finis, on a une "version" avec valeurs absolues :

Théorème 4 bis (inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a\ ;\ b]$.

$$\text{Si } |f| \leqslant M \text{ sur } I \text{ alors } \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M|b-a|$$

Démonstration :

Déjà, comme f est continue sur I, elle est bornée sur I. (Voir la leçon sur la continuité). Ceci nous assure l'existence des réels m et M.

Ensuite, on intègre de a à b l'inégalité $m \leqslant f(t) \leqslant M$. (Pour $t \in I$)

Il vient ($a \leqslant b$) : $\displaystyle\int_a^b m\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}t$ d'où $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M(b-a)$

Pour la version avec valeurs absolues, même principe que ci-dessus avec $m = -M$.

Notons que ce théorème peut se démontrer aussi avec l'inégalité des accroissement finis appliquée à la fonction $\mathscr{F}$ définie par $\mathscr{F}(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice : démontrer la "première formule de la moyenne"

Soient f et g deux fonctions continues définies sur un intervalle $[a, b]$ avec g positive. Alors

Il existe c dans $[a, b]$ tel que $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, il esiste des constantes m et M telles que :

$$m \leqslant f \leqslant M \text{ sur } [a, b]$$

Comme g est positive : $m\,g \leqslant f\,g \leqslant M\,g$ sur $[a, b]$

En intégrant cet encadrement entre a et b ($a < b$) :

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Si $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$, alors la formule de la moyenne est évidente (tout c de $[a, b]$ convient)

Si $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$, alors on pose : $\lambda = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$

Comme $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$ (puisque g l'est), on a : $m \leqslant \lambda \leqslant M$

Et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

D'où le résultat.

VI) Intégration par parties

On dit qu'une fonction f est de classe C^1 sur un intervalle I si elle est dérivable sur I et si sa dérivée f' est continue sur I.

Théorème 5

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a ; b]$, alors :

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration : on sait que $(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$

En intégrant de a à b ($a \leqslant b$) : $\int_a^b (u(t)v(t))'\,\mathrm{d}t = \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$

$$\left[u(t)v(t)\right]_a^b = \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où le théorème.

Exemples : calculer $I = \int_0^1 t\mathbf{e}^t \, \mathrm{d}t$ et $J(x) = \int_1^x \ln t \, \mathrm{d}t$

On pose : $u(t) = t$ $\quad u'(t) = 1$

$v'(t) = \mathbf{e}^t$ $\quad v(t) = \mathbf{e}^t$ (à une constante près)

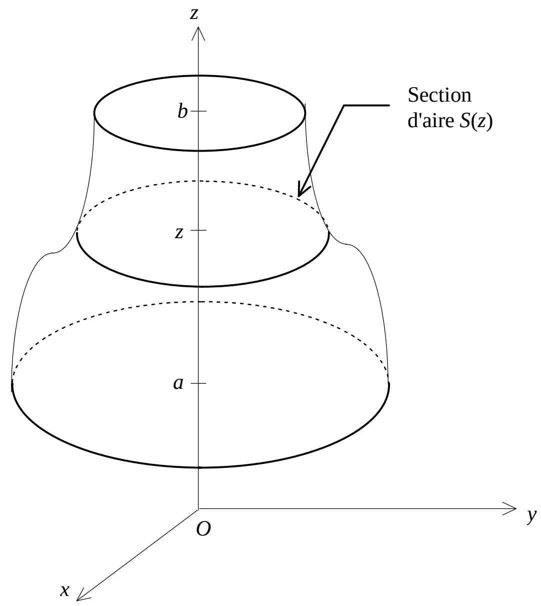
D'où $I = \left[t\mathbf{e}^t\right]_0^1 - \int_0^1 \mathbf{e}^t \, \mathrm{d}t = \mathbf{e} - (\mathbf{e} - 1) = 1$

On pose : $u(t) = \ln t$ $\quad u'(t) = \dfrac{1}{t}$

$v'(t) = 1$ $\quad v(t) = t$ (à une constante près)

D'où $J(x) = \left[t \ln t\right]_1^x - \int_1^x \mathrm{d}t = x \ln x - (x - 1) = x \ln x - x + 1.$

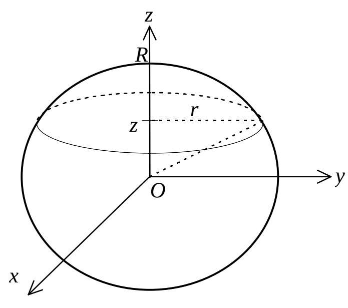
VII) Calcul de volumes



Dans l'espace muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère un solide délimité par des **plans parallèles** d'équation $z = a$ et $z = b$. Si la fonction S qui, à toute cote z associe l'aire de la section contenue dans le plan perpendiculaire à l'axe $(O, \vec{k})$ est **continue** sur $[a\ ;\ b]$ alors le volume V du solide est donné par la formule :

$$V = \int_a^b S(z) \, \mathrm{d}z \text{ u.v.}$$

(L'unité de volume est le volume du parallélépipède unité)



Exemples :

Volume d'une sphère de rayon R :

On a $r^2 = R^2 - z^2$, d'où $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$

$$V = \pi \int_{-R}^{R} R^2 - z^2 \, \mathrm{d}z = \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-R}^{R}$$

$$V = \pi(R^3 - \frac{1}{3}R^3 + R^3 - \frac{1}{3}R^3) = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ u.v.}$$

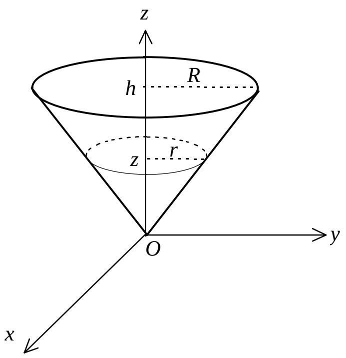
Volume d'un cône de hauteur h et de rayon de base R :

$S(z) = \pi r^2$.

D'après Thalès : $\frac{r}{R} = \frac{z}{h}$

Donc $S(z) = \pi \frac{R^2}{h^2} z^2$.

$V = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^2 \, \mathrm{d}z = \frac{\pi R^2 h}{3}$ u.v.



VIII) Vrai ou faux

f et g désignent des fonctions continues sur les intervalles considérés.

- Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ alors $f \leqslant g$ sur $[a\ ;\ b]$ (Faux : $\int_0^1 t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{3}{4}\,\mathrm{d}t$ et pourtant $t \not\leqslant \frac{3}{4}$ sur $[0\ ;\ 1]$!)
- Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ alors $f = g + c$ sur $[a\ ;\ b]$ (Faux : prendre $f(t) = t$ et $g(t) = -t$ sur $[-1\ ;\ 1]$)
- $\int_1^2 \frac{x^2 \mathbf{e}^x \ln(1+x^2)}{(1+x^4)}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ (Vrai : positivité)

IX) Exercices

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$ (Linéariser : $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$)
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}$ (Linéariser : $\cos^3 t = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos(t)$)
- $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |\sin t|\,\mathrm{d}t = 2$ (Utiliser Chasles : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$ ce qui permet de supprimer les valeurs absolues)
- $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{e}^x \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$ (Intégrer deux fois par parties de façon à retomber sur l'intégrale I)
- $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n\,\mathrm{d}t$ (intégrales de Wallis)

  Calculer I_0 et I_1. Établir une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.

  Calculer J_0. Établir une relation de récurrence entre J_{n+1} et J_n.

  (On trouve $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$. Intégrer I_{n+2} par parties, en écrivant que $\sin^{n+2} x = \sin^{n+1} x \times \sin x$. On peut alors exprimer I_{n+2} en fonction de I_n. On trouve : $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$

  On trouve $J_0 = 2$. Puis on intègre J_{n+1} par parties , en écrivant $(t^2-1)^{n+1} = 2t \times \frac{1}{2} t (t^2-1)^n - (t^2-1)^n$. On peut alors exprimer J_{n+1} en fonction de J_n. On trouve : $J_{n+1} = -\frac{2n+2}{2n+3} J_n$)

- Trouver un réel α tel que $\int_{-1}^{1} x^2 - \alpha \, dx = 0$. Trouver un réel β tel que $\int_{-1}^{1} x^4 - \beta x^2 \, dx = 0$. ($\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{3}{5}$)
- Étudier la limite suivante : $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{2\varepsilon} \frac{1}{t} \, dt$. (On trouve ln 2 et non 0...)
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction I_n définie pour $x > 0$ par : $I_n(x) = \int_0^x t^n \mathbf{e}^{-t} \, dt$. On note $I_n = \lim_{x \to +\infty} I_n(x)$.

  (On admettra que cette limite est réelle)

  À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{n+1} = (n + 1)I_n$.

  Calculer I_0 et en déduire, par récurrence, que $I_n = n!$

X) Complément : autre définition de l'intégrale

On a vu au paragraphe III que l'intégrale d'une fonction continue positive correspond à une aire. Cette notion peut être généralisée et adoptée en tant que définition de l'intégrale :

Déjà, précisons les données du problème :

Soit $I = [a, b]$ un intervalle véritable ($a < b$) de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur I.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $t_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. (En particulier $t_0 = a$ et $t_n = b$)

On a ainsi un découpage régulier de l'intervalle I. (En effet, $t_{k+1} - t_k = \frac{b-a}{n}$ pour $k = [\![0, n-1]\!]$)

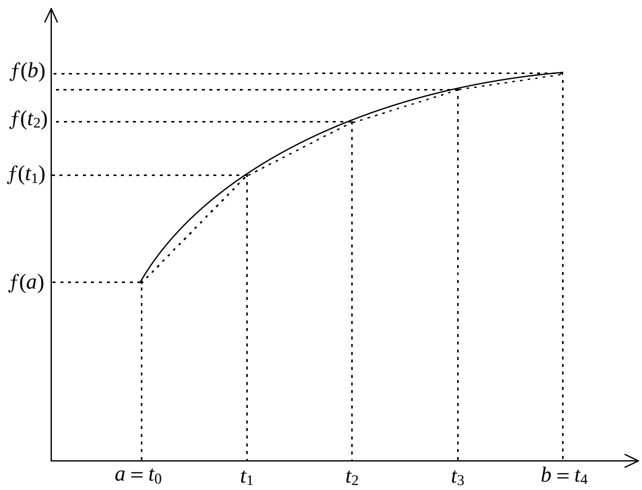
Posons :

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{[f(t_k) + f(t_{k+1})]\frac{b-a}{n}}{2} = \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} [f(t_k) + f(t_{k+1})] = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)\right]$$

$S_n(f)$ représente une somme d'aires de trapèzes. En effet, $\frac{[f(t_k) + f(t_{k+1})]\frac{b-a}{n}}{2}$ n'est autre que la formule $\frac{(b+B)h}{2}$ où b, B et h représentent respectivement la petite, la grande base et la hauteur des trapèzes successifs.

$S_n(f)$ est appelée à juste titre "formule des trapèzes" ou encore "formule de Simpson" (formule permettant d'ailleurs de calculer des valeurs approchées d'une intégrale)

Illustration dans le cas où $n = 4$



On démontre (mais cela dépasse le cadre de ce cours) que lorsque f est continue :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f) \text{ existe}$$

On note alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite

On démontre que cette nouvelle définition de l'intégrale (dite "intégrale de Riemann") possède toutes les bonnes propriétés (Chasles, linéarité, positivité, etc ...)

Problème : avec cette définition, comment démontrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$?

On utilise alors le théorème suivant (qui est hors-programme) démontrant l'existence de primitives :

> Théorème
>
> Soit I un intervalle $[a, b]$ non réduit à un point. Soit f une application continue sur I.
>
> Soit $x_0 \in I$ et $\mathscr{F}$ l'application définie sur I par : $\mathscr{F}(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
>
> 1. $\mathscr{F}$ est continue sur I.
> 2. $\mathscr{F}$ est de classe C^1 sur I et $\mathscr{F}' = f$ sur I.

Préliminaires : soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition : Une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en $x_0 \in I$ si :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in I : (|x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon)$$

Définition : Une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I sur elle est continue en tout $x_0 \in I$.

Définition : Une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est k-lipschitzienne sur I si :

$$\exists k > 0, \forall x, y \in I : |f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|$$

Propriété : toute application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ k-lipschitzienne sur I est continue sur I.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x_0 \in I$. Par hypothèse : $\exists k > 0, \forall x \in I : |f(x) - f(x_0)| \leqslant k|x - x_0|$

Choisissons $\eta < \dfrac{\varepsilon}{k}$. Ainsi, si $|x - x_0| \leqslant \eta$ alors on a : $|f(x) - f(x_0)| \leqslant k\eta \leqslant \varepsilon$.

Donc f est continue en x_0.

Ce raisonnement étant valable pour tout $x_0 \in I$, f est continue sur I.

Démonstration du théorème :

1) Puisque f est continue sur I, elle est bornée sur I et atteint ses bornes. Posons :

$$M = \sup_{t\in I}|f(t)|$$

Pour tous $x, y \in I$, on a :

$$|\mathscr{F}(y) - \mathscr{F}(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M(y - x)$$

Donc $\mathscr{F}$ est M-lipschitzienne sur I donc continue sur I.

2) Soit $x \in I$. Montrons que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists h \in \mathbb{R}^* \text{ tel que } x + h \in I \Rightarrow \left|\frac{\mathscr{F}(x+h) - \mathscr{F}(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

On en déduira que le taux d'accroissement $\frac{\mathscr{F}(x+h) - \mathscr{F}(x)}{h}$ tend vers $f(x)$ lorsque h tend vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$.

Cas 1 : si $h > 0$.

Nous avons, pour tout $h > 0$ tel que $x + h \in I$: $\frac{\mathscr{F}(x+h) - \mathscr{F}(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t}{h}$

En outre, $f(x) = \frac{\int_x^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}t}{h}$.

Donc : $\left|\frac{\mathscr{F}(x+h) - \mathscr{F}(x)}{h} - f(x)\right| = \frac{1}{h}\left|\int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,\mathrm{d}t$

Or, f est continue sur I donc en x :

$$\exists \eta > 0, \forall t \in I : (|t - x| \leqslant \eta \Rightarrow |f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon)$$

Or, $t \in [x\,;\,x + h]$, donc $|t - x| \leqslant h$.

Donc pour $h < \eta$, on a : $|f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

D'où : $\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon h$ et $\left|\frac{\mathscr{F}(x+h) - \mathscr{F}(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$.

Cas 2 : si $h < 0$

Nous avons, pour tout $h < 0$ tel que $x + h \in I$: $\frac{\mathscr{F}(x+h) - \mathscr{F}(x)}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t}{h}$

En outre, $f(x) = \frac{\int_x^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}t}{h}$.

Donc :

$$\left|\frac{\mathscr{F}(x+h) - \mathscr{F}(x)}{h} - f(x)\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)\,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{|h|}\left|\int_{x+h}^{x} \big(f(t) - f(x)\big)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|h|}\int_{x+h}^{x} |f(t) - f(x)|\,\mathrm{d}t$$

Or, f est continue sur I donc en x :

$$\exists \eta > 0, \forall t \in I : (|t - x| \leqslant \eta \Rightarrow |f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon)$$

Or, $t \in [x + h\,;\,x]$, donc $|t - x| \leqslant |h|$.

Donc pour $|h| < \eta$, on a : $|f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon$

D'où : $\int_{x+h}^{x} |f(t) - f(x)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon|h|$ et $\left|\frac{\mathscr{F}(x+h) - \mathscr{F}(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$.

Bilan : dans tous les cas l'accroissement moyen $\frac{\mathscr{F}(x+h) - \mathscr{F}(x)}{h}$ tend vers $f(x)$ lorsque h tend vers 0.

On en déduit que $\mathscr{F}$ est dérivable en tout $x \in I$ et que $\mathscr{F}' = f$ sur I.

En outre, comme f est continue sur I, $\mathscr{F}$ l'est également donc $\mathscr{F}$ est de classe C^1 sur I.

<u>Remarque</u> : si f n'est que continue par morceaux sur $[a\,;\,b]$ alors une primitive $\mathscr{F}$ de f n'est pas nécessairement dérivable sur $[a, b]$. (Considérer f définie sur $[-1\,;\,1]$ par : $f(x) = 1$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$. La fonction $\mathscr{F}$

définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par $\mathscr{F}(x) = x$ si $x \geqslant 0$ et $\mathscr{F}(x) = 0$ si $x < 0$ est la primitive de f qui s'annule en 0 (ou en x_0 avec $x_0 \in [-1\ ;\ 0]$ mais $\mathscr{F}$ n'est pas dérivable en 0)

<u>Corollaire</u>

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a, b]$.

Soit $x_0 \in I$ et $\mathscr{F}$ l'application définie sur I par : $\mathscr{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. (L'application $\mathscr{F}$ est une primitive de f).

Soit F une primitive quelconque de f.

Alors : $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

<u>Démonstration</u> :

On sait que deux primitives diffèrent d'une constante donc : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que : $F = \mathscr{F} + k$ sur I.

On a donc : $F(b) - F(a) = \mathscr{F}(b) - \mathscr{F}(a) = \int_{x_0}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (d'après Chasles)

Soit α un nombre réel quelconque.

Soit $\varepsilon > 0$ et $A > 1$. On considère les intégrales suivantes :

$$I_\alpha(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_\alpha(A) = \int_1^A \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Le but du problème est de déterminer :

- les valeurs de α pour lesquelles I_α admet une limite finie lorsque ε tend vers 0.
- les valeurs de α pour lesquelles J_α admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.

Étude de I_α

1. Étude du cas $\alpha = 1$
   a) Démontrer que $I_1(\varepsilon) = -\ln \varepsilon$.
   b) En déduire $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_1(\varepsilon)$.
2. Étude du cas $\alpha \neq 1$
   a) Démontrer que $I_\alpha(\varepsilon) = \dfrac{1}{1-\alpha} - \dfrac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
   b) En écrivant $\varepsilon^{1-\alpha} = \mathbf{e}^{(1-\alpha)\ln\varepsilon}$, déterminer les valeurs du réel α pour lesquelles $\varepsilon^{1-\alpha}$ admet une limite finie lorsque ε tend vers 0.
   c) Conclure : I_α admet une limite finie lorsque ε tend vers 0 si et seulement si ....

Remarque : on note dans ce cas $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ cette limite et on a donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}$

Étude de J_α

1. Étude du cas $\alpha = 1$
   a) Démontrer que $J_1(A) = \ln A$.
   b) En déduire $\lim\limits_{A\to +\infty} J_1(A)$.
2. Étude du cas $\alpha \neq 1$
   a) Démontrer que $J_\alpha(A) = \dfrac{A^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha}$.
   b) En écrivant $A^{1-\alpha} = \mathbf{e}^{(1-\alpha)\ln A}$, déterminer les valeurs du réel α pour lesquelles $A^{1-\alpha}$ admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.
   c) Conclure : I_α admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$ si et seulement si ....

Remarque : on note dans ce cas $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ cette limite et on a donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}$

<u>RÉSUMÉ</u>

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $\alpha < 1$. (On dit alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge)

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $\alpha > 1$? (On dit alors que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge)

On considère la fonction Γ définie pour $x \in \ ]0 ; +\infty[$ par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$

1. Justification de l'écriture $\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$

   a) On considère la fonction I_x définie pour $\varepsilon > 0$ par : $I_x(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

      i) Démontrer que pour tout $t \in [\varepsilon ; 1]$, on a : $0 \leqslant t^{x-1}\mathbf{e}^{-t} \leqslant \dfrac{1}{t^{1-x}}$.

      ii) En déduire (en utilisant les résultats sur les intégrales de Riemann) que I_x admet une limite finie lorsque ε tend vers 0.

      On note $\int_0^1 t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ cette limite.

   b) On considère la fonction J_x définie pour $A > 1$ par : $J_x(A) = \int_1^A t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$.

      i) Démontrer que pour tout $t \in [1 ; A]$, on a : $0 \leqslant t^{x-1}\mathbf{e}^{-t} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

      ii) En déduire (en utilisant les résultats sur les intégrales de Riemann) que J_x admet une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.

      On note $\int_1^{+\infty} t^{x-1}\mathbf{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$ cette limite.

2. Propriétés de la fonction Γ

   a) Calculer Γ(1).

   b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : pour tout $x > 0$, $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$

   c) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n - 1)!$

Il s'agit, pour $n \in \mathbb{N}$, des intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, dt \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \, dt \qquad K_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt \qquad L_n = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \, dt$$

Calcul de I_n par IPP

On a immédiatement : $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = 1$.

Pour tout $n \geqslant 0$, on a par IPP : ($u(t) = (\cos t)^{n+1}$ et $v'(t) = \cos t$)

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n+1} \cos t \, dt = \left[(\cos t)^{n+1} \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n (\sin t)^2 \, dt$$

$$I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

$$\text{(Variante : } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \text{ pour tout } n \geqslant 2)$$

On en déduit immédiatement : $I_2 = \dfrac{1}{2} I_0 = \dfrac{\pi}{4}$; $I_3 = \dfrac{2}{3} I_1 = \dfrac{2}{3}$; $I_4 = \dfrac{3}{4} I_2 = \dfrac{3\pi}{16}$

Formule générale :

Si n pair ($n = 2p$) $\qquad I_{2p} = \dfrac{2p-1}{2p} \times \dfrac{2p-3}{2p-2} \times \ldots \times \dfrac{1}{2} I_0$

$$I_{2p} = \frac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2} = \frac{C_{2p}^{p}\pi}{2^{2p+1}}$$

Si n impair ($n = 2p + 1$) $\qquad I_{2p+1} = \dfrac{2p}{2p+1} \times \dfrac{2p-2}{2p-1} \times \ldots \times \dfrac{2}{3} I_1$

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Calcul de J_n en se ramenant à I_n

En posant $u = \dfrac{\pi}{2} - t$, on obtient :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \, dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)^n (-du) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^n \, du = I_n$$

Calcul de K_n en se ramenant à I_{2n+1}

En posant $u = \text{Arcsin}\, t$. (Bijection de $[-1 ; 1]$ dans $[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}]$). On a donc : $t = \sin u$.

$$K_n = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{2n} \cos u \, du = 2\, I_{2n+1} = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Calcul de L_n en se ramenant à K_n

$$L_n = \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \, dt = (-1)^n K_n = \frac{(-1)^n 2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Équivalent des intégrales de Wallis lorsque *n* tend +∞

On raisonne avec la suite (I_n).

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $\quad 0 \leqslant \cos^{n+1} t \leqslant \cos^n t$

En intégrant pour t allant de 0 à $\frac{\pi}{2}$: $\quad 0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$

En conséquence, la suite (I_n) est décroissante.

On a donc : $\quad 0 \leqslant I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$

Et comme $I_{n+2} > 0$: $\quad 1 \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leqslant \dfrac{I_n}{I_{n+2}}$

Or, on a vu que : $\quad \dfrac{I_n}{I_{n+2}} = \dfrac{n+2}{n+1} \qquad (1)$

D'où : $\quad 1 \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}} \leqslant \dfrac{n+2}{n+1}$

Par encadrement, on en déduit que $\dfrac{I_{n+1}}{I_{n+2}}$ admet une limite égale à 1 en +∞.

Autrement dit : $\quad I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n+1} \qquad (2)$

Montrons enfin que la suite (u_n) définie par $u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ est constante :

$$u_{n+1} = (n+2)\, I_{n+1}\, I_{n+2} \overset{(1)}{=} (n+1)\, I_n\, I_{n+1} = u_n.$$

La suite (u_n) est donc bien constante. Et comme $u_0 = I_0\, I_1 = \frac{\pi}{2}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\pi}{2}$.

En multipliant l'équivalent (2) par $(n+1)I_n$:

$$(n+1)\, I_n^2 \underset{+\infty}{\sim} u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

D'où : $\quad I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

On retiendra ce résultat très utile :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$