ALGÈBRE GÉNÉRALE

MINI-LEXIQUE

Partie II : Relation d'équivalence, relation d'ordre

1 RELATION D'ÉQUIVALENCE

1.1 RÉFLEXIVITÉ

Une relation R est réflexive dans E si et seulement si :

$$\forall x \in E, \quad x R x$$

1.2 SYMÉTRIE

Une relation R est symétrique dans E si et seulement si :

$$\forall x \in E, \quad x R y \rightarrow y R x$$

1.3 TRANSITIVITÉ

Une relation R est transitive dans E si et seulement si :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, \quad x R y \wedge y R z \rightarrow x R z$$

1.4 RELATION D'ÉQUIVALENCE

Une relation est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive.

1.5 PARTITION

Une famille $(A_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles de E forme une partition de E si et seulement si :

- $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$
- $\forall i \in I, \forall j \in I, A_i \cap A_j = \emptyset$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = E$

1.6 CLASSE D'ÉQUIVALENCE

La classe d'équivalence de l'élément a de E par la relation R est l'ensemble des éléments de E qui sont en relation avec a par R . Elle est notée $cl(a)$ ou $\dot{a}$ ou $\bar{a}$.

$$cl(a) = \{ x \in E, x R a \}$$

Propriété : les classes d'équivalence des éléments de E pour la relation R forment une partition de E .

1.7 ENSEMBLE QUOTIENT

Étant donnée une relation d'équivalence R sur un ensemble E , l'ensemble-quotient de E par R , noté E/R , est l'ensemble des classes d'équivalence de E par R .

2 RELATION D'ORDRE

2.1 ANTISYMMÉTRIE

Une relation R est antisymétrique dans E si et seulement si :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad x R y \wedge y R x \rightarrow x = y$$

2.2 RELATION D'ORDRE

Une relation est une relation d'ordre dans E si et seulement si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

2.3 ORDRE TOTAL

La relation d'ordre dans E , R , est dite d'ordre total ssi :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad x R y \vee y R x$$

2.4 ORDRE PARTIEL

Si la relation d'ordre R n'est pas d'ordre total, elle est d'ordre partiel.

2.5 APPLICATION CROISSANTE - DÉCROISSANTE - MONOTONE

Soit $\times$ une relation d'ordre sur un ensemble E et soit $\prec$ une relation d'ordre sur un ensemble F .

L'application f de E dans F est dite croissante ssi :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad x \times y \rightarrow f(x) \prec f(y)$$

L'application f de E dans F est dite décroissante ssi :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad x \times y \rightarrow f(y) \prec f(x)$$

Une application toujours croissante ou toujours décroissante sur une partie A de E est dite monotone sur A .