

11. Espaces vectoriels, homomorphismes, bases

11.1. ESPACES VECTORIELS, ALGÈBRES

- 11.1.1. Structure d'espace vectoriel et d'algèbre
- 11.1.2. Combinaisons linéaires
- 11.1.3. Espaces vectoriels et algèbres classiques

11.2. SOUS-ESPACES VECTORIELS ET SOUS-ALGÈBRES

- 11.2.1. Définitions et caractérisations
- 11.2.2. Exemples classiques
- 11.2.3. Opérations entre sous-espaces vectoriels
- 11.2.4. Sommes directes
- 11.2.5. Sous-espaces supplémentaires

11.3. APPLICATIONS LINÉAIRES

- 11.3.1. Définitions et notations
- 11.3.2. Exemples d'applications linéaires
- 11.3.3. Opérations sur les applications linéaires
- 11.3.4. Noyau et image
- 11.3.5. Projections et symétries vectorielles

11.4. FAMILLES LIBRES, GÉNÉRATRICES, BASES

- 11.4.1. Familles libres
- 11.4.2. Familles génératrices
- 11.4.3. Bases

11.5. ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

- 11.5.1. Notion de dimension finie
- 11.5.2. Sous-espaces de dimension finie
- 11.5.3. Exemples d'espaces vectoriels de dimension finie
- 11.5.4. Applications linéaires et dimension finie

11.6. FORMES LINÉAIRES, HYPERPLANS, DUALITÉ

11.6.1. Formes linéaires, espace dual

11.6.2. Hyperplans et formes linéaires

11.6.3. Bases duales

11.6.4. Exemples de bases duales

11.6.5. Équations d'un sous-espace en dimension finie

11. Espaces vectoriels, homomorphismes, bases

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

11.1. ESPACES VECTORIELS, ALGÈBRES

11.1.1. Structure d'espace vectoriel et d'algèbre

Définition

On dit que l'ensemble E est un *espace vectoriel* sur $\mathbb{K}$, ou un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, si :

- E est muni d'une loi interne $+$ pour laquelle E est un groupe commutatif.
- Il existe une application $(\alpha, u) \rightarrow \alpha u$ de $\mathbb{K} \times E$ dans E , dite *loi externe* telle que :

$$\begin{aligned} \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad & \begin{cases} (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, & \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v \\ \forall (u, v) \in E^2 \quad & \begin{cases} \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, & 1u = u \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Conventions

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Les éléments de E sont appelés *vecteurs* et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés *scalaires*.

Le neutre $\vec{0}$ de $(E, +)$ est appelé *vecteur nul*.

L'espace vectoriel E est parfois noté $(E, +, \cdot)$ pour rappeler les deux lois.

Proposition (Règles de calcul dans un espace vectoriel)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Pour tout scalaire α et tous vecteurs u et v :

- $\alpha u = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \text{ou} \quad u = \vec{0}$.
- $\alpha(-u) = (-\alpha)u = -(\alpha u)$.
- $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$.

Remarque (Dépendance relativement au corps des scalaires)

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, c'en est également un sur tout sous-corps $\mathbb{K}'$ de $\mathbb{K}$.

Par exemple un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel est aussi un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Si $\mathbb{K}' \neq \mathbb{K}$, ces deux espaces vectoriels doivent être considérés comme différents.

Définition (Structure d'algèbre)

On dit qu'un ensemble E est une *algèbre* sur $\mathbb{K}$ si :

- $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- E est muni d'une loi produit $\times$ pour laquelle $(E, +, \times)$ est un anneau.
- Pour tous u, v de E et tout λ de K :

$$\lambda(uv) = (\lambda u)v = u(\lambda v).$$

Si de plus la loi $\times$ est commutative, l'algèbre E est dite commutative.

11.1.2. Combinaisons linéaires

Définition (*Familles à support fini*)

Soit $(A, +)$ un monoïde additif, et $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de A .

On dit que $(a_i)_{i \in I}$ est à *support fini* si l'ensemble des indices i tels que $a_i \neq 0$ est fini.

Pour une telle famille, on peut donc considérer $\sum_{i \in I} a_i$, qu'on appelle somme à support fini.

On note $A^{(I)}$ l'ensemble des familles à support fini d'éléments de A .

Définition (*Combinaisons linéaires*)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

Soit $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille à support fini d'éléments de $\mathbb{K}$.

La somme $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i$ est appelée *combinaison linéaire* des vecteurs u_i avec les coefficients λ_i .

11.1.3. Espaces vectoriels et algèbres classiques

Définition (*Espace vectoriel produit*)

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ une famille de n espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Soit E l'ensemble produit $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$.

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ quand on pose :

$$\begin{cases} \forall u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in E, \forall v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} \\ u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \text{ et } \lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n) \end{cases}$$

Cas particulier

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, E^n est donc muni d'une structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Exemples d'espaces vectoriels

- $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même, la loi externe étant ici le produit de $\mathbb{K}$.

C'est même une algèbre commutative.

- On en déduit la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ les } x_i \in \mathbb{K}\}$.
- Soient X un ensemble non vide quelconque et E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Soit $\mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble de toutes les applications f de X dans E .

$\mathcal{F}(X, E)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, quand on pose :

$$\begin{cases} \forall f \in \mathcal{F}(X, E), \forall g \in \mathcal{F}(X, E), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \\ (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \end{cases}$$

Le vecteur nul est ici l'*application nulle* ω définie par : $\forall x \in E, \omega(x) = \vec{0}$.

Si E est une algèbre, on définit un produit dans $\mathcal{F}(X, E)$ en posant :

$$\forall f \in \mathcal{F}(X, E), \forall g \in \mathcal{F}(X, E), \forall x \in X, (fg)(x) = f(x)g(x).$$

$\mathcal{F}(X, E)$ est alors muni d'une structure d'algèbre sur $\mathbb{K}$.

- L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre commutative.
- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes, p colonnes, et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Si $n = p$, c'est une algèbre sur $\mathbb{K}$, non commutative dès que $n \geq 2$.

11.2. SOUS-ESPACES VECTORIELS ET SOUS-ALGÈBRES

11.2.1. Définitions et caractérisations

Définition (*Sous-espace vectoriel*)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit F une partie de E .

On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E si :

- F est *stable* pour les deux lois : $\begin{cases} \forall (u, v) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K} \\ u + v \in F \quad \text{et} \quad \lambda u \in F \end{cases}$
- Muni des lois induites, F est un espace vectoriel.

Remarques

- On dit souvent *sous-espace* plutôt que sous-espace vectoriel.
- $\{\vec{0}\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E , appelés sous-espaces *triviaux*.

Proposition (*Caractérisation*)

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et F une partie de E .

F est un sous-espace vectoriel de E

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset. \\ \forall (u, v) \in F^2, u + v \in F. \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \lambda u \in F. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset. \\ \forall (u, v) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \\ \lambda u + \mu v \in F. \end{cases}$$

Remarques

- Dans les caractérisations précédentes, on n'oubliera pas la condition $F \neq \emptyset$.

En général, on se contente de vérifier que le vecteur nul $\vec{0}$ de E appartient à F .

En effet, tous les sous-espaces vectoriels de E contiennent au moins $\vec{0}$.

- Soit F un sous-espace vectoriel de E .

Pour toute famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de F , et pour toute famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{K}$ à support fini, la combinaison linéaire $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i$ est encore un élément de F .

On exprime cette propriété en disant que F est *stable par combinaisons linéaires*.

- Si F est un sous-espace vectoriel de E et si G est un sous-espace vectoriel de F , alors G est un sous-espace vectoriel de E .
- Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels pour les mêmes lois, et si $F \subset E$, alors F est un sous-espace vectoriel de E .

Définition (*Sous-algèbre*)

Soit E une algèbre sur $\mathbb{K}$. Soit F une partie de E .

On dit que F est une *sous-algèbre* de E si :

- $(F, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$.
- $(F, +, \times)$ est un sous-anneau de $(E, +, \times)$.

Muni des lois induites, F est donc effectivement une algèbre sur $\mathbb{K}$.

Proposition (*Caractérisation*)

Soient E une algèbre sur $\mathbb{K}$, de neutre multiplicatif 1_E , et F une partie de E .

F est une sous-algèbre de E si et seulement si :

$$\begin{cases} 1_E \in F & (\text{donc } F \neq \emptyset.) \\ \forall (u, v) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda u + \mu v \in F. \\ \forall (u, v) \in F^2, uv \in F. \end{cases}$$
11.2.2. Exemples classiques

- Soit n un entier naturel. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, mais pas une sous-algèbre si $n \geq 1$.
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point.

Soit $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel de toutes les applications de I dans $\mathbb{K}$.

Les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$:

L'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$.

L'ensemble $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{K}$.

Proposition et définition (*Sous-espace engendré*)

Soit X une partie non vide d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

On note $\text{Vect}(X)$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X .

$\text{Vect}(X)$ est un sous-espace vectoriel de E appelé *sous-espace engendré* par X .

Si par exemple $X = \{x_i, 1 \leq i \leq n\}$, alors $\text{Vect } X = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$.

11.2.3. Opérations entre sous-espaces vectoriels**Proposition** (*Intersections de sous-espaces vectoriels*)

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E .

Alors $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

Remarque

Soit X une partie non vide d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

Le sous-espace $\text{Vect}(X)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) des sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X .

C'est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X .

Proposition (*Sommes de sous-espaces vectoriels*)

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E .

Soit F l'ensemble des sommes à support fini $\sum_{i \in I} u_i$, où pour tout i de I , $u_i \in F_i$.

F est un sous-espace vectoriel de E , appelé *somme* des F_i , et noté $F = \sum_{i \in I} F_i$.

Remarques

- Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , $F + G = \{u + v, u \in F, v \in G\}$.
- Si F et G sont deux sous-espaces de E , leur réunion $H = F \cup G$ n'est un sous-espace de E que si $F \subset G$ auquel cas $H = G$, ou $G \subset F$ auquel cas $H = F$.
- En général une réunion de sous-espaces de E n'est donc pas un sous-espace de E .

La somme $F = \sum_{i \in I} F_i$ est en fait le plus petit sous-espace de E contenant tous les F_i .

C'est donc le sous-espace vectoriel de E engendré par la réunion des F_i .

11.2.4. Sommes directes**Définition**

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E .

On dit que la somme $F = \sum_{i \in I} F_i$ est *directe* si tout vecteur v de F s'écrit *de manière unique* sous la forme d'une somme à support fini $\sum_{i \in I} u_i$, où pour tout i de I , $u_i \in F_i$.

La somme F est alors notée $F = \bigoplus_{i \in I} F_i$.

Exemples des sommes finies

Dans le cas d'une famille finie $F_1, F_2, \dots, F_n$ de sous-espaces vectoriels de E , on notera

$F = \bigoplus_{i=1}^n F_i = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n$ la somme des F_i si elle est directe.

On dit également dans ce cas que $F_1, F_2, \dots, F_n$ sont *en somme directe*.

Tout vecteur v de F s'écrit alors de manière unique : $v = \sum_{i=1}^n u_i$, où pour tout i , $u_i \in F_i$.

On dit que u_i est la *composante* de u sur F_i relativement à cette somme directe.

Proposition (Caractérisation des sommes directes)

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E .

La somme $F = \sum_{i \in I} F_i$ est directe si et seulement si :

Pour toute famille (u_i) à support fini ($u_i \in F_i$ pour tout i), $\sum_{i \in I} u_i = \vec{0} \Rightarrow \forall i \in I, u_i = \vec{0}$.

Proposition (Cas d'une somme directe de deux sous-espaces)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

La somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

Remarques

- Si la somme $\sum_{i \in I} F_i$ est directe, et si J est une partie de I , alors $\sum_{i \in J} F_i$ est directe.

En particulier, pour tous indices distincts i et j , $F_i \cap F_j = \{\vec{0}\}$.

- La réciproque est fausse. Pour montrer que $F_1, F_2, \dots, F_n$ sont en somme directe, avec $n \geq 3$, il ne suffit pas de vérifier que pour tous indices distincts i et j , $F_i \cap F_j = \{\vec{0}\}$.

Ce serait encore pire de se contenter de vérifier que $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n = \{\vec{0}\}$.

- Une bêtise classique consiste à écrire que la somme $F + G$ est directe si et seulement si l'intersection $F \cap G$ est vide! L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E n'est en effet *jamaïs* vide car elle contient toujours $\vec{0}$.

Il faut en fait vérifier que l'intersection $F \cap G$ se *réduit* à $\{\vec{0}\}$.

11.2.5. Sous-espaces supplémentaires

Définition

- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
On dit que F et G sont *supplémentaires* dans E si $E = F \oplus G$.
Cela signifie que tout u de E s'écrit d'une manière unique $u = v + w$, avec $\begin{cases} v \in F \\ w \in G \end{cases}$

Théorème

- Soit F un sous-espace vectoriel de E .
Alors F possède au moins un supplémentaire G dans E .

Remarques

- Ce résultat est admis pour l'instant. Il sera démontré dans le cas particulier des espaces vectoriels de dimension finie.
- Un même sous-espace F de E possède en général une infinité de supplémentaires dans E .

Il y a cependant deux cas d'unicité :

- Si $F = E$, le seul supplémentaire de F dans E est $\{\vec{0}\}$.
- Si $F = \{\vec{0}\}$, le seul supplémentaire de F dans E est E lui-même.
- On ne confondra pas *supplémentaire* et *complémentaire*!

Le complémentaire d'un sous-espace F de E est un ensemble sans grand intérêt : ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E car il ne contient pas le vecteur nul.

Exemples de sous-espaces vectoriels supplémentaires

- Dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, les sous-espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ formés respectivement des matrices symétriques et antisymétriques sont supplémentaires.
- Dans l'espace vectoriel $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les sous-espaces $\mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ formés respectivement des fonctions paires et impaires sont supplémentaires.

11.3. APPLICATIONS LINÉAIRES

11.3.1. Définitions et notations

Définition (*Applications linéaires*)

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Une application f de E dans F est dite *linéaire* si :

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \begin{cases} f(u + v) = f(u) + f(v) \\ f(\lambda u) = \lambda f(u) \end{cases}$$

On dit aussi que f est un *morphisme* d'espaces vectoriels.

Remarques

- f est linéaire de E dans F si et seulement si :
 $\forall (u, v) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \quad f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$
 - Si f est linéaire, alors $f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(u_i)$ pour toute combinaison linéaire.
 - Si f est linéaire de E dans F , alors $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.
- Cette remarque est parfois utilisée pour montrer qu'une application n'est pas linéaire.

Notations et terminologie

- On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .
- Un *endomorphisme* de E est une application linéaire de E dans lui-même.
 On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .
- Un *isomorphisme* est une application linéaire bijective.
- Un *automorphisme* de E est un isomorphisme de E dans lui-même.
 On note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .
- Une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

11.3.2. Exemples d'applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

- L'application nulle de E dans F est linéaire.
- L'application *identité* id_E est un automorphisme de E .
- Pour tout scalaire λ , l'application $h_\lambda : u \rightarrow \lambda u$ est un endomorphisme de E .

Pour tous scalaires λ et μ : $h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu}$.

h_λ un automorphisme si $\lambda \neq 0$, et alors $h_\lambda^{-1} = h_{1/\lambda}$.

Si $\lambda \neq 0$, on dit que h_λ est l'*homothétie* de rapport λ .

- Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.

L'application $f \rightarrow \varphi(f) = \int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire sur E .

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point. L'application qui à une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ associe sa dérivée f' est linéaire de $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

La restriction de cette application à $E = \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ est un endomorphisme de E .

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$.

L'application $f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$.

11.3.3. Opérations sur les applications linéaires

Proposition (*Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$*)

- || Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
- || Soient f et g deux applications linéaires de E dans F , et α, β deux scalaires.
- || Alors $\alpha f + \beta g$ est linéaire de E dans F .
- || On en déduit que $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition (*Composition d'applications linéaires*)

- || Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.
- || Si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont linéaires, alors $g \circ f$ est linéaire de E dans G .

Conséquence (*Structure d'algèbre de $\mathcal{L}(E)$*)

Si f et g sont deux endomorphismes de E , alors $g \circ f$ est un endomorphisme de E .

On en déduit que $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.

En général cette algèbre n'est pas commutative.

Remarque

- Soit f un endomorphisme de E et n un entier naturel.
Alors $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n fois) est un endomorphisme de E .
- Dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$, on peut utiliser la formule du binôme $(f + g)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k f^k \circ g^{n-k}$,
à condition que les applications f et g commutent.
- Par exemple, les applications h_λ commutent avec tous les endomorphismes de E .

Proposition (*Isomorphisme réciproque*)

- || Soit f un isomorphisme de E sur F .
- || Sa bijection réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F sur E .

Conséquence (*Structure de groupe de $\mathcal{GL}(E)$*)

Soient f et g deux automorphismes de E .

Alors f^{-1} et $g \circ f$ sont encore des automorphismes de E .

On en déduit que $\mathcal{GL}(E)$ est un groupe pour la loi de composition des applications.

Ce groupe est en général non commutatif.

11.3.4. Noyau et image

Proposition (*Applications linéaires et sous-espaces vectoriels*)

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit f un morphisme de E dans F .

- Si E' est un sous-espace de E , alors $f(E')$ est un sous-espace de F .
- Si F' est un sous-espace de F , son image réciproque par f est un sous-espace de E .

Définition (*Noyau et image*)

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit f un morphisme de E dans F .

- L'ensemble $f(E) = \{v = f(u), u \in E\}$ est un sous-espace vectoriel de F .

On l'appelle *image* de f et on le note $\text{Im}(f)$.

- L'ensemble $\{u \in E, f(u) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E .

On l'appelle *noyau* de f et on le note $\text{Ker}(f)$.

Remarques

- On peut parfois montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel en l'interprétant comme le noyau ou l'image d'une application linéaire.
- Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E , et soit λ un scalaire.

Notons E_λ l'ensemble des vecteurs u de E tels que $f(u) = \lambda u$.

On constate que $f(u) = \lambda u \Leftrightarrow (f - \lambda \text{id})(u) = \vec{0} \Leftrightarrow u \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id})$.

On en déduit que E_λ est un sous-espace vectoriel de E .

C'est le cas en particulier pour $\text{Inv}(f) = E_1$ (vecteurs *invariants*) et pour $\text{Opp}(f) = E_{-1}$ (vecteurs changés en leur opposé par f).

Proposition (*Caractérisation de l'injectivité*)

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit f un morphisme de E dans F .

f est injective si et seulement si son noyau $\text{Ker}(f)$ se réduit à $\{\vec{0}_E\}$.

Autrement dit, f est injective si et seulement si : $\forall u \in E, f(u) = \vec{0}_F \Rightarrow u = \vec{0}_E$.

11.3.5. Projections et symétries vectorielles

Définition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Pour tout vecteur u de E : $\exists! v \in F, \exists! w \in G$ tels que $u = v + w$.

- L'application $p : u \rightarrow p(u) = v$ est la *projection* sur F , parallèlement à G .
- L'application $s : u \rightarrow s(u) = v - w$ est la *symétrie* par rapport à F , parallèlement à G .

Avec les notations précédentes, on a :

Propriétés

- p est un endomorphisme de E , et il vérifie $p \circ p = p$.

L'image de p est F et son noyau est G .

F est aussi le sous-espace vectoriel des vecteurs invariants par p .

- s est un automorphisme de E , et $s \circ s = \text{id}$. Ainsi s est involutif : $s^{-1} = s$.

On a la relation $s = 2p - \text{id}$, qui s'écrit encore $p = \frac{1}{2}(s + \text{id})$.

F est le sous-espace des vecteurs invariants par s .

G est le sous-espace des vecteurs changés en leur opposé par s .

- Si on note p' la projection sur G parallèlement à F , et s' la symétrie par rapport à G parallèlement à F , alors
$$\begin{cases} p + p' = \text{id}, & p \circ p' = p' \circ p = 0 \\ s + s' = 0, & s \circ s' = s' \circ s = -\text{id} \end{cases}$$

Cas particulier

On considère la somme directe $E = E \oplus \{\vec{0}\}$.

La projection sur E parallèlement à $\{\vec{0}\}$ est l'application id_E . C'est le seul cas où une projection vectorielle est injective.

La projection sur $\{\vec{0}\}$ parallèlement à E est l'application nulle.

La symétrie par rapport à E parallèlement à $\{\vec{0}\}$ est l'application id_E .

La symétrie par rapport à $\{\vec{0}\}$ parallèlement à E est l'application $-\text{id}_E$.

Définition (Projecteur d'un espace vectoriel)

|| Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

|| On appelle *projecteur* de E tout endomorphisme p de E tel que $p \circ p = p$.

Proposition (Projecteur $\Leftrightarrow$ projection)

|| Si p est un projecteur de E , alors $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.

|| L'application p est la projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

Remarque

On ne généralisera pas abusivement la propriété $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$.

Si f est un endomorphisme de E tout est en effet possible entre $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$.

Par exemple l'inclusion $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ équivaut à $f \circ f = 0$.

On montre que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ équivaut à
$$\begin{cases} \text{Ker}(f^2) = \text{Ker}(f) \\ \text{Im}(f^2) = \text{Im}(f) \end{cases}$$

ce qui n'équivaut pas à $f^2 = f$.

Proposition (Endomorphisme involutif $\Leftrightarrow$ symétrie)

|| Si s est un endomorphisme involutif de E , donc si $s \circ s = \text{id}$, alors $E = \text{Inv}(s) \oplus \text{Opp}(s)$.

|| L'application s est la symétrie par rapport à $\text{Inv}(s)$ parallèlement à $\text{Opp}(s)$.

11.4. FAMILLES LIBRES, GÉNÉRATRICES, BASES

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toutes les sommes considérées ici sont à support fini.

11.4.1. Familles libres

Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est *libre*, ou encore que les vecteurs de cette famille sont *linéairement indépendants* si :

Pour toute famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{K}^{(I)}$, $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = \vec{0} \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0$.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de scalaires *non tous nuls* telle que $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = \vec{0}$, on dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est *liée*, ou encore que les vecteurs qui la composent sont *linéairement dépendants*.

Remarques et propriétés

- **(Cas d'une famille finie de vecteurs).** La famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est libre si :

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = \vec{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Elle est liée s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, l'un au moins étant non nul, tels que : $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = \vec{0}$.

- On ne doit pas confondre *non tous nuls* et *tous non nuls*.
- Une famille réduite à un seul vecteur u est libre si et seulement si u est non nul.
- Une famille de deux vecteurs u et v est liée si et seulement si u et v sont *colinéaires*, ou encore *proportionnels*, c'est-à-dire s'il existe un scalaire λ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.

Cela ne se généralise pas aux familles de plus de deux vecteurs.

- Une famille de vecteurs est liée si et seulement si l'un des vecteurs qui la compose peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Cela équivaut à dire que toute sur-famille d'une famille liée est liée.

En particulier toute famille contenant $\vec{0}$, ou deux vecteurs colinéaires, est liée.

- Attention à ne pas dire que u et v sont liés si et seulement si il existe un scalaire λ tel que $u = \lambda v$, car c'est faux si $v = \vec{0}$ et $u \neq \vec{0}$ (en revanche c'est vrai si $v \neq \vec{0}$).
- Dans l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, toute famille de polynômes non nuls dont les degrés sont différents deux à deux est libre.

C'est le cas pour la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\deg P_0 < \deg P_1 < \dots < \deg P_n < \dots$: on parle alors de famille de polynômes à *degrés échelonnés*.

Proposition (*Applications linéaires et familles libres*)

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f un morphisme de E dans F .

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E .

- Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est liée, alors la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est liée.

Bien entendu, si la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est libre, la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre.

- Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est libre et si f est injective, alors la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est libre.

Interprétation

Toute application linéaire transforme une famille liée en une famille liée.

Une application linéaire *injective* transforme une famille libre en une famille libre.

11.4.2. Familles génératrices**Définition**

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

On dit qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est génératrice, ou encore que les vecteurs de cette famille *engendrent* E si $\text{Vect}(\{u_i, i \in I\}) = E$, c'est-à-dire :

$$\forall u \in E, \quad \exists (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \quad u = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i.$$

Remarques

- (*Cas d'une famille finie de vecteurs*)

La famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est génératrice dans E si :

Pour tout vecteur v de E , il existe n scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que : $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$.

- Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est encore génératrice.
- Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et F un sous-espace vectoriel strict de E .

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F . Le caractère libre ou non de cette famille ne dépend pas de l'espace vectoriel, F ou E , auxquels ils sont censés appartenir. En revanche, si cette famille est génératrice dans F , elle ne l'est pas dans E . Quand il y a un risque d'ambiguïté, on précisera donc dans quel espace vectoriel telle famille de vecteurs est génératrice.

Proposition (*Applications linéaires et familles génératrices*)

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ et f un morphisme de E dans F .

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E .

- La famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est génératrice de $\text{Im} f$.
- En particulier, si f est surjective, alors la famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est génératrice de F .

Interprétation

On peut donc dire qu'une application linéaire surjective transforme une famille génératrice en une famille génératrice.

11.4.3. Bases

Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est une *base* de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Théorème (Existence de bases)

Dans tout espace vectoriel E non réduit à $\{\vec{0}\}$, il y a des bases.

Remarques

- Ce théorème sera démontré dans le cas particulier des espaces vectoriels de dimension finie.
- On a précisé $E \neq \{\vec{0}\}$ car dans l'espace $\{\vec{0}\}$ il n'y a même pas de famille libre!

Proposition et définition

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur v de E peut s'écrire, et de manière unique, comme une combinaison linéaire des vecteurs u_i : $v = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$.

Les coefficients λ_i sont appelés *coordonnées*, de v dans la base $(u_i)_{i \in I}$.

Remarques et exemples

- (Cas d'une famille finie de vecteurs)

La famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E si pour tout v de E , il existe un n -uplet unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de $\mathbb{K}^n$ tel que : $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i$.

- Si i, j, k forment une base de E , et si les coordonnées d'un vecteur v dans cette base sont a, b, c , (c'est-à-dire si $v = ai + bj + ck$), alors j, k, i forment une base de E dans laquelle les coordonnées de v sont b, c, a .

Conclusion : deux bases se déduisant l'une de l'autre par modification de l'ordre des vecteurs doivent être considérées comme distinctes.

- La famille $(X^k)_{k \in \mathbb{N}} = 1, X, X^2, \dots$ est une base (dite *base canonique*) de $\mathbb{K}[X]$.

Proposition (Applications linéaires et bases)

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, E étant muni d'une base $(e_i)_{i \in I}$.

Pour toute famille $(v_i)_{i \in I}$ de vecteurs de F , il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que : $\forall i \in I, f(e_i) = v_i$:

- f est injective si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est libre.
- f est surjective si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est génératrice dans F .
- f est bijective si et seulement si la famille $(v_i)_{i \in I}$ est une base de F .

Interprétation

Un morphisme est défini de manière unique par les images des vecteurs d'une base.

Un morphisme f de E vers F est un isomorphisme si et seulement si f transforme une base de E en une base de F . Il transforme alors toute base de E en une base de F .

11.5. ESPACES VECTORIELS DE DIMENSION FINIE

11.5.1. Notion de dimension finie

Définition

- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
On dit que E est *de dimension finie* si E possède une famille génératrice finie.

Remarques

- Avec cette définition, l'espace réduit à $\{\vec{0}\}$ est de dimension finie.
- Si un espace vectoriel n'est pas de dimension finie il est dit de dimension infinie.
C'est le cas de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Proposition

- Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
Soit $(e) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E .
- Si (e) est génératrice dans E , toute famille contenant plus de n vecteurs est liée.
 - Si (e) est libre, aucune famille de moins de n vecteurs n'est génératrice dans E .

Théorème (*Théorème de la base incomplète*)

- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.
Soit (e) une famille génératrice finie de E .
Soit $(u) = u_1, \dots, u_p$ une famille libre de E , non génératrice.
Alors il est possible de compléter la famille (u) à l'aide de vecteurs de la famille (e) , de manière à former une base de E .

Conséquence

Dans tout espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{\vec{0}\}$, il existe des bases.

Théorème et définition (*Dimension d'un espace vectoriel*)

- Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie non réduit à $\{0\}$, toutes les bases de E sont finies et elles ont le même nombre d'éléments.
Ce nombre est appelé *dimension* de E et est noté $\dim(E)$.
Par convention, on pose $\dim\{\vec{0}\} = 0$.

Remarques

- On appelle *droite vectorielle* tout espace vectoriel E de dimension 1.
Tout vecteur non nul u constitue alors une base de E , et $E = \{\lambda u, \lambda \in \mathbb{K}\}$.
- On appelle *plan vectoriel* tout espace vectoriel E de dimension 2.
Deux vecteurs u et v non proportionnels en forment une base : $E = \{\lambda u + \mu v, \lambda \in \mathbb{K}, \mu \in \mathbb{K}\}$.

- La dimension d'un espace vectoriel E dépend du corps de base.

Si E est un espace de dim n sur $\mathbb{C}$, c'est un espace de dimension $2n$ sur $\mathbb{R}$.

Par exemple, $\mathbb{C}$ est une droite vectorielle sur $\mathbb{C}$ et un plan vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Pour éviter toute ambiguïté, on note parfois $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Proposition (*Bases en dimension finie*)

- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.
 Soit $(u) = u_1, u_2, \dots, u_n$ une famille de n éléments de E .
 (u) est une base $\Leftrightarrow$ elle est libre $\Leftrightarrow$ elle est génératrice.

Remarque (*Une interprétation de la dimension*)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, de dimension $n \geq 1$.

Toute famille libre est constituée d'au plus n vecteurs, ou encore : toute famille de plus de n vecteurs est liée.

Toute famille génératrice est formée d'au moins n vecteurs, ou encore : toute famille de moins de n vecteurs n'est pas génératrice.

La dimension n de E est donc :

- Le nombre minimum d'éléments d'une famille génératrice.
- Le nombre maximum d'éléments d'une famille libre.

11.5.2. Sous-espaces de dimension finie

Proposition (*Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie*)

- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .
 Soit F un sous-espace vectoriel de E .
 Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
 On a l'égalité $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $F = E$.

Proposition (*Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels*)

- Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
- Si F et G sont en somme directe, alors $\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$.
 - Dans le cas général, $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Généralisation

- Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ une famille de p sous-espaces vectoriels de E .
- On a toujours $\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$.
 - On a l'égalité $\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i) \Leftrightarrow$ la somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe.

Proposition (*Base adaptée à une somme directe*)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces de E , de dimension finie, en somme directe.

Pour tout j de $\{1, \dots, p\}$, soit $(e)_j$ une famille de vecteurs de F_j .

On forme la famille $(e) = (e)_1 \cup (e)_2 \cup \dots \cup (e)_p$ en *juxtaposant* les familles $(e)_j$.

- Si chaque famille $(e)_j$ est libre, la famille (e) est libre.
- Si chaque $(e)_j$ engendre le sous-espace F_j correspondant, (e) engendre $\bigoplus F_j$.
- Si chaque $(e)_j$ est une base du sous-espace F_j correspondant, (e) est une base de $\bigoplus F_j$.

Ceci est particulièrement intéressant si $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$, car on obtient alors une base de E , qui est dite *adaptée* à la somme directe.

11.5.3. Exemples d'espaces vectoriels de dimension finie• **n-uplets**

$\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension n .

Une base de $\mathbb{K}^n$ est la famille $(e_k)_{1 \leq k \leq n}$, où, pour tout entier k de $\{1, \dots, n\}$:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1).$$

On l'appelle la *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.

Les coordonnées de $u = (x_1, \dots, x_n)$ dans cette base sont $x_1, \dots, x_n$, car $u = \sum_{k=1}^n x_k e_k$.

• **Polynômes de degré inférieur ou égal à n**

l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, de dimension $n + 1$.

Une base de $\mathbb{K}_n[X]$ est : $1, X, X^2, \dots, X^n$.

• **Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$**

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices de type (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension np . Une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est formée des matrices $E_{i,j}$ où pour tous indices i dans $\{1, \dots, n\}$ et j dans $\{1, \dots, p\}$ tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls sauf celui situé en ligne i et colonne j qui vaut 1.

Cette base est dite canonique.

Par exemple une base de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$ est formée des matrices :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{3,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Morphismes d'espaces vectoriels**

Si E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives n et p , alors l'espace vectoriel de toutes les applications linéaires de E dans F est de dimension np .

- **Produits d'espaces vectoriels de dimension finie**

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$.

Plus généralement : $\dim(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m) = \sum_{i=1}^m \dim(E_i)$, et $\dim(E^m) = m \dim(E)$.

11.5.4. Applications linéaires et dimension finie

Proposition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, E étant de dimension finie.
Alors E et F sont isomorphes (c'est-à-dire il existe un isomorphisme de E sur F) si et seulement si F est de dimension finie avec $\dim(F) = \dim(E)$.

Conséquence (*Importance de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$*)

Tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$, est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Si $(u)_{1 \leq k \leq n}$ est une base de E , l'application φ définie par $\varphi((x_1, x_2, \dots, x_n)) = \sum_{k=1}^n x_k u_k$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur E .

L'existence d'un tel isomorphisme fait de $\mathbb{K}^n$ l'exemple-type du $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, sa base canonique étant la base la plus naturelle.

Théorème (*Théorème de la dimension*)

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, E étant de dimension finie.
Soit f une application linéaire de E dans F .
Alors $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de F .
De plus on a l'égalité : $\dim(E) = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Ker}(f))$.

Remarque

Le théorème précédent est très souvent utilisé. On appelle *rang* de f la dimension de $\text{Im}(f)$. C'est pourquoi ce résultat est souvent appelé *théorème du rang*.

Proposition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, de même dimension n .
Soit f une application linéaire de E dans F .
 f est un isomorphisme $\Leftrightarrow f$ est injective $\Leftrightarrow f$ est surjective.

11.6. FORMES LINÉAIRES, HYPERPLANS, DUALITÉ

11.6.1. Formes linéaires, espace dual

Définition (*Formes linéaires*)

- Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
 Une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
 On note E^* l'ensemble de toutes les formes linéaires sur E , c'est-à-dire $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.
 E^* est appelé le *dual* de E : il possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Exemples

- Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des applications continues sur le segment $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'application $\varphi : f \mapsto \int_a^b f(t) dt$ est une forme linéaire sur E .
- Soit $E = \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des applications d'un ensemble X non vide vers $\mathbb{K}$.
 Soit x_0 est un élément particulier de X .
 L'application $\varphi : f \mapsto f(x_0)$ en x_0 est une forme linéaire sur E .
- Si $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$, l'application *trace* qui à tout M de E associe $\text{tr}(M)$ est une forme linéaire sur E .

Remarque

Soit f une forme linéaire sur E . Alors f est soit identiquement nulle, soit surjective.

Proposition (*Expression des formes linéaires en dimension finie*)

- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , muni d'une base $(e) = e_1, \dots, e_n$.
- Soit $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$.
 L'application f_a qui à $u = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ associe $\sum_{k=1}^n a_k x_k$ est une forme linéaire sur E .
 On note qu'avec cette définition on a : $a_i = f(e_i)$ pour tout i de $\{1, \dots, n\}$.
 - Réciproquement, soit f une forme linéaire sur E .
 Alors il existe un vecteur a unique de $\mathbb{K}^n$ tel que $f = f_a$.

Exemple

Les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ sont les applications qui s'écrivent $(x, y, z) \rightarrow ax + by + cz$, où (a, b, c) est un triplet quelconque de $\mathbb{R}^3$.

11.6.2. Hyperplans et formes linéaires

Proposition et définition (Hyperplans)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit H un sous-espace vectoriel de E .

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- Il existe un vecteur u dans $E \setminus H$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}u$.
- Pour tout vecteur u de $E \setminus H$, on $E = H \oplus \mathbb{K}u$.
- Il existe une forme linéaire non nulle f telle que $H = \text{Ker } f$.

Si ces conditions sont réalisées, on dit que H est un *hyperplan* de E .

Remarques et propriétés

- Les hyperplans de E sont donc les sous-espaces vectoriels de E qui sont supplémentaires d'une droite vectorielle, ou encore les noyaux des formes linéaires non nulles sur E .
- Si $\dim E = n \geq 1$, les hyperplans de E sont les sous-espaces de E de dimension $n - 1$.
- Deux formes linéaires non nulles f et g sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même hyperplan noyau.
- Si H est un hyperplan de E et si f est une forme linéaire non nulle telle que $H = \text{Ker } f$, alors l'égalité $f(x) = 0$ (où x est quelconque dans E) est appelée *équation* de l'hyperplan H .

Cette équation est unique à un facteur multiplicatif près.

- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base $(e) = e_1, \dots, e_n$.

Soit H un hyperplan de E . L'équation de H s'écrit de manière unique (à un coefficient multiplicatif non nul près) $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$, en notant $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ les coordonnées dans (e) d'un vecteur x quelconque de E .

11.6.3. Bases duales

Proposition et définition

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base $(e) = e_1, \dots, e_n$.

Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, on note e_i^* la forme linéaire définie sur E par :

- $e_i^*(e_i) = 1$.
- $\forall j \in \{1, \dots, n\}$, avec $i \neq j$, $e_i^*(e_j) = 0$.

La famille $(e^*) = e_1^*, \dots, e_n^*$ est une base de E^* , appelée *base duale* de la base (e) .

Remarques

- On peut résumer la définition de e_i^* en notant, avec les notations de Kronecker :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, e_i^*(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$
- Si $\dim E = n$, la proposition précédente montre que $\dim E^* = n$, ce qui découle en fait d'une propriété plus générale, à savoir :

Si E, F sont de dimensions finies, alors $\dim \mathcal{L}(E, F) = (\dim E)(\dim F)$.

En particulier $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, K) = (\dim E)(\dim K) = \dim E$.

- Pour tout indice i dans $\{1, \dots, n\}$, et pour tout vecteur $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$, on a $e_i^*(x) = x_i$.

e_i^* est donc la forme linéaire qui envoie tout x de E sur sa i -ième coordonnée dans (e) .

C'est pourquoi on désigne souvent les formes linéaires $e_1^*, \dots, e_n^*$ de la base duale (e^*) comme les *formes linéaires coordonnées* dans la base (e) .

- Les coordonnées d'une forme linéaire dans la base duale (e^*) sont les images par f des vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ de la base (e) : $f = \sum_{k=1}^n f(e_k) e_k^*$.

Proposition

- || Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.
 || Tout base de E^* est d'une manière unique la base duale d'une base de E .

Conséquence

Si (e) est une base de E et si (e^*) est sa base duale, alors la base (e) est déterminée de manière unique par la donnée de e^* .

C'est pourquoi on pourra dire que les bases (e) et (e^*) sont duales l'une de l'autre.

11.6.4. Exemples de bases duales

- **Lien avec la formule de Taylor pour les polynômes**

Soit a un élément de $\mathbb{K}$. Les $A_k = (X - a)^k$ ($0 \leq k \leq n$) forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

La base duale est formée des applications $A_k^* : P \rightarrow \frac{1}{k!} P^{(k)}(a)$.

L'égalité $P = \sum_{k=0}^n A_k^*(P) A_k$ n'est autre que la formule de Taylor :

$$P = P(a) + P'(a)(X - a) + \frac{1}{2!} P''(a)(X - a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} P^{(n)}(a)(X - a)^n.$$

- **Lien avec l'interpolation de Lagrange**

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ une famille de $n + 1$ points distincts de $\mathbb{K}$.

Pour tout k de $\{0, \dots, n\}$, notons $L_k = \prod_{j \neq k} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$.

La famille $(L) = L_0, L_1, \dots, L_n$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

La base duale de (L) est formée des formes linéaires $L_k^* : P \rightarrow P(a_k)$.

L'égalité $P(X) = \sum_{k=0}^n L_k^*(P) L_k(X) = \sum_{k=0}^n P(a_k) L_k(X)$ est appelée formule d'interpolation de Lagrange pour les points $a_0, a_1, \dots, a_n$.

Plus généralement, et pour tout $(n + 1)$ -uplet $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$, le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^n \alpha_k L_k(X)$ est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n qui prend les valeurs $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ aux points $a_0, a_1, \dots, a_n$.

11.6.5. Équations d'un sous-espace en dimension finie

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base $(e) = e_1, \dots, e_n$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E , de dimension p , avec $0 \leq p < n$.

Il existe une famille de $n - p$ formes linéaires indépendantes $f_1, \dots, f_{n-p}$ telles que :

$$x \in F \iff f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_{n-p}(x) = 0.$$

Réciproquement, un tel système de $n - p$ équations indépendantes définit un sous-espace de dimension p de E .

Remarques

- (S) : $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \dots, f_{n-p}(x) = 0$ est appelé un système d'équations de F .
- On suppose que E est rapporté à une base $(e) = e_1, e_2, \dots, e_n$.

Si on exprime les formes linéaires f_i dans la base duale (e^*) c'est-à-dire en fonction des formes linéaires coordonnées dans (e) , alors (S) prend la forme d'un système linéaire homogène de $n - p$ équations aux n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$ (les coordonnées dans (e) d'un vecteur quelconque x de E .)

- Si on note $H_1, H_2, \dots, H_{n-p}$ les hyperplans noyaux des formes linéaires $f_1, f_2, \dots, f_{n-p}$, le résultat précédent s'écrit $F = \bigcap_{k=1}^{n-p} H_k$.

Autrement dit, tout sous-espace de dimension p dans un espace vectoriel de dimension n peut être considéré comme l'intersection de $n - p$ hyperplans *indépendants*.

• Un premier exemple

On suppose que $\dim E = 5$, et on considère le système suivant :

$$(S) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

où $x_1, x_2, \dots, x_5$ sont les coordonnées d'un vecteur x quelconque de E dans la base (e) .

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ de ce système est de rang 3 comme on peut le voir avec la méthode du pivot.

L'ensemble F des solutions de (S) est donc un sous-espace de dimension $5 - 3 = 2$ de E .

Les solutions de ce système peuvent être considérées comme formant l'intersection des trois hyperplans H_1 , H_2 et H_3 d'équations respectives :

$$\begin{cases} (H_1) & : & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ (H_2) & : & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ (H_3) & : & x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

H_1 , H_2 et H_3 sont les noyaux respectifs des formes linéaires f_1 , f_2 et f_3 définies par :

$$\begin{cases} f_1 = e_1^* - 2e_2^* + 3e_3^* - e_4^* + e_5^* \\ f_2 = 2e_1^* - e_2^* + e_3^* + e_4^* - e_5^* \\ f_3 = e_1^* + 2e_2^* - 2e_3^* - e_4^* + 3e_5^* \end{cases}$$

La matrice de f_1, f_2, f_3 dans la base duale (e^*) est : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = {}^T A$

Cette matrice est de rang 3.

Cela prouve l'indépendance des formes linéaires f_1, f_2, f_3 .

On en déduit que $F = \text{Ker} f_1 \cap \text{Ker} f_2 \cap \text{Ker} f_3$ est de dimension $5 - 3 = 2$.

Pour trouver une base de E , on peut appliquer la méthode du pivot à (S) :

$$\begin{aligned} \text{(S)} \quad & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1 \\ E_3 \leftarrow E_3 - E_1 \end{array} \\ \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 4x_2 - 5x_3 + 2x_5 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} E_1 \leftarrow 3E_1 + 2E_2 \\ E_3 \leftarrow 3E_3 - 4E_2 \end{array} \\ \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 3x_1 - x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_3 - 12x_4 + 18x_5 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} E_1 \leftarrow 5E_1 + E_3 \\ E_2 \leftarrow E_2 + E_3 \end{array} \\ \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 15x_1 - 3x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_2 - 9x_4 + 15x_5 = 0 \\ 5x_3 - 12x_4 + 18x_5 = 0 \end{cases} \\ \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}(x_4 + x_5) \\ x_2 = 3x_4 - 5x_5 \\ x_3 = \frac{1}{5}(12x_4 - 18x_5) \end{cases} \\ \\ \Leftrightarrow & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{x_4}{5}(-1, 15, 12, 5, 0) - \frac{x_5}{5}(1, 25, 18, 0, -5). \end{aligned}$$

Puisqu'on peut donner des valeurs arbitraires à x_4 et à x_5 , on voit qu'une base de F est formée des deux vecteurs $(-1, 15, 12, 5, 0)$ et $(1, 25, 18, 0, -5)$.

• **Un deuxième exemple**

Etant donnée une base d'un sous-espace vectoriel F de E , il peut être utile de trouver un système d'équations de F : c'est le problème inverse du précédent.

Supposons par exemple que E soit de dimension 4 et qu'une base de F soit formée des vecteurs $u = (1, -1, 2, 1)$ et $v = (1, 1, 3, -2)$.

Soit $a = (x, y, z, t)$ un vecteur quelconque de E .

Pour exprimer que a appartient à F il faut écrire que la famille (u, v, a) est de rang 2.

On applique donc la méthode du pivot à la matrice suivante :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & y \\ 2 & 3 & z \\ 1 & -2 & t \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 1 & -2x+z \\ 0 & -3 & -x+t \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & x+y \\ 0 & 0 & -5x-y+2z \\ 0 & 0 & x+3y+2t \end{array} \right)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice précédente soit de rang 2 est que les coordonnées x, y, z, t vérifient le système :

$$\begin{cases} -5x - y + 2z = 0 \\ x + 3y + 2t = 0 \end{cases}$$

On a ainsi obtenu un système d'équations de F .