13. Déterminants

13. Déterminants

13.1. Applications multilinéaires alternées

Comme d'habitude, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

13.1.1. Applications multilinéaires

Définition

Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n, F$ une famille de $n+1$ espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

Soit f une application de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ dans F.

On dit que f est est *n-linéaire*, ou encore *multilinéaire*, si pour tout indice i de $\{1, \ldots, n\}$ et pour tout choix d'un vecteur u_j dans chaque E_j avec $j \neq i$, l'application de E_i dans F définie par $u \rightarrow f(u_1, \ldots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \ldots, u_n)$ est linéaire.

On note $\mathcal{L}_n(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n, F)$ l'ensemble de ces applications.

Si $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$, on simplifie cette notation en $\mathcal{L}_n(E, F)$.

Remarques et propriétés

- Il est clair que l'ensemble $\mathcal{L}_n(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- Si f est n-linéaire et si l'un des u_i est nul, alors $f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \overrightarrow{0}$.

  Cela résulte en effet de la linéarité par rapport à la i-ième composante
- Si $n = 2$, on parle d'application *bilinéaire*.

  Si $n = 3$, on parle d'application *trilinéaire*.

  Si $F = \mathbb{K}$, on parle de *forme* n-linéaire.
- Une application f de $E \times F$ dans G est bilinéaire si et seulement si :

  $\forall (u, u') \in E^2, \forall (v, v') \in F^2, \forall (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{K}^4$:

  $$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta u', \gamma v + \delta v') &= \alpha f(u, \gamma v + \delta v') + \beta f(u', \gamma v + \delta v') \\ &= \alpha\gamma f(u, v) + \alpha\delta f(u, v') + \beta\gamma f(u', v) + \beta\delta f(u', v') \end{aligned}$$
- Si $n = 1$, une application de E dans F est "n-linéaire" si et seulement si elle est linéaire.

  Autrement dit $\mathcal{L}_1(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.
- En revanche, si $n \geq 2$, on ne confondra pas linéarité et n-linéarité.

  Par exemple :

  $$\begin{cases} \text{Si } f \text{ est linéaire, } f(\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n) = \lambda f(u_1, u_2, \ldots, u_n) \\ \text{Si } f \text{ est } n\text{-linéaire, } f(\lambda u_1, \lambda u_2, \ldots, \lambda u_n) = \lambda^n f(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{cases}$$

  De même, si $n = 2$:

  $$\begin{cases} \text{Si } f \text{ linéaire, } f(u + u', v + v') = f(u, v) + f(u', v') = f(u, v') + f(u', v) \\ \text{Si } f \text{ est bilinéaire, } f(u + u', v + v') = f(u, v) + f(u, v') + f(u', v) + f(u', v') \end{cases}$$

13.1.2. Applications multilinéaires alternées

Définition

On dit qu'une application n-linéaire f de E^n dans F est *alternée* si :
$\forall(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n, \forall(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, avec $i \neq j$:
$f(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = -f(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$.
Autrement dit l'échange de deux vecteurs quelconques change l'image par f en son opposée.
On note $\mathcal{A}_n(E,F)$ l'ensemble des applications n-linéaires alternées de E^n dans F.

Remarque et exemples

- Il est clair que l'ensemble $\mathcal{A}_n(E,F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- Si $n = 1$, toute application "n-linéaire" de E dans F (c'est-à-dire en fait linéaire de E dans F) peut être considérée comme "alternée".
- Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

  Le "produit vectoriel" $(u,v) \to u \wedge v$ est bilinéaire alterné de E^2 dans E.

  Le "produit mixte" $(u,v,w) \to (u \wedge v) \cdot w = u \cdot (v \wedge w)$ est une forme trilinéaire.

Proposition

Soit f une application n-linéaire alternée de E^n dans F.

- Si deux des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont égaux, alors $f(u_1, \ldots, u_n) = \overrightarrow{0}$.
- On ne modifie pas l'image $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ en ajoutant à l'un des vecteurs u_i une combinaison linéaire des autres vecteurs u_j.
- Si les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont liés, alors $f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \overrightarrow{0}$.

Conséquence

Si E est un espace vectoriel de dimension finie strictement inférieure à n, alors la seule application n-linéaire alternée de E^n dans F est l'application nulle.

Proposition et définition

Toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$ peut se décomposer en une suite de tranpositions (c'est-à-dire d'échanges de deux éléments).
Une telle décomposition n'est pas unique. En revanche, la parité du nombre de transpositions entrant dans la décomposition d'une permutation σ donnée est toujours la même.
Si ce nombre est pair (resp. impair) on dira que σ est paire (resp. impaire) et que sa *signature* $\varepsilon(\sigma)$ est égale à 1 (resp. -1).

Proposition

Soit f une application n-linéaire alternée de E^n dans F.
Soit σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de signature $\varepsilon(\sigma)$.
Pour tous vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de E, on a : $f(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \ldots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

13.2. Application “déterminant dans une base”

Dans cette section, E est un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ sur $\mathbb{K}$.
On cherche quelles sont les formes n-linéaires alternées sur E.

13.2.1. Cas de la dimension $n \leq 3$

- **En dimension** 1

  On suppose donc que E est une droite vectorielle.

  Rappelons que toutes les formes 1-linéaires sur E sont considérées comme “alternées”.

  La dimension de $\mathcal{A}_\infty(E,K) = \mathcal{L}(E,K) = E^*$ est donc 1. Soit e un vecteur non nul de E.

  Une forme linéaire sur E est définie de manière unique par l'image de e.

  En particulier une seule d'entre elles vérifie $\varphi(e) = 1$.

  Cette application est alors définie par : $\forall x \in \mathbb{K}, \varphi(xe) = x$.

  φ est appelée *application déterminant* dans la base (e).

  Pour toute forme linéaire f sur E, $f = \lambda\varphi$ avec $\lambda = f(e)$.

- **En dimension** 2

  Soit E un plan vectoriel muni d'une base $(e) = e_1, e_2$.

  Soit f une forme bilinéaire alternée sur E^2.

  Soient $u = x_1e_1 + y_1e_2$ et $u_2 = x_2e_1 + y_2e_2$ deux vecteurs quelconques de E.

  $$\begin{aligned} f(u_1,u_2) &= f(x_1e_1 + y_1e_2, x_2e_1 + y_2e_2) \\ &= x_1x_2 \underbrace{f(e_1,e_1)}_{=0} + x_1y_2f(e_1,e_2) + y_1x_2 \underbrace{f(e_2,e_1)}_{=-f(e_1,e_2)} + y_1y_2 \underbrace{f(e_2,e_2)}_{=0} = (x_1y_2 - y_1x_2)f(e_1,e_2). \end{aligned}$$

  Réciproquement, on constate que l'application φ définie sur E^2 par :

  $$\varphi(u_1,u_2) = \varphi(x_1e_1 + y_1e_2, x_2e_1 + y_2e_2) = x_1y_2 - y_1x_2$$

  est une forme bilinéaire alternée sur E^2 et vérifie $\varphi(e_1,e_2) = 1$.

  φ est appelée *application déterminant* dans la base (e).

  Le calcul précédent montre que $\mathcal{A}_2(E,K)$ est une droite vectorielle et que pour toute forme bilinéaire alternée f sur E^2, on a $f = \lambda\varphi$ avec $\lambda = f(e_1,e_2)$.

  On voit que φ est la seule forme bilinéaire alternée sur E^2 telle que $\varphi(e_1,e_2) = 1$.

- **En dimension** 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $(e) = e_1, e_2, e_3$.

Soit f une forme trilinéaire alternée sur E^3.

Soient u_1, u_2, u_3 trois vecteurs de E, donnés par leurs composantes dans (e) :

$u_1 = x_1e_1 + y_1e_2 + z_3e_3, \quad u_2 = x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3, \quad u_3 = x_3e_1 + y_3e_2 + z_3e_3.$

Le développement de $f(u_1, u_2, u_3)$ sécrit $\sum\limits_{i,j,k} x_i\, y_j\, z_k\, f(e_i, e_j, e_k)$, où les trois indices i, j, k prennent indifféremment toutes les valeurs de 1 à 3.

L'application f étant alternée, les quantités $f(e_i, e_j, e_k)$ sont nulles dès que deux au moins des trois indices i, j, k sont égaux.

Le développement de $f(u_1, u_2, u_3)$ se réduit donc à :

$$\begin{aligned} f(u_1, u_2, u_3) &= x_1\, y_2\, z_3 f(e_1, e_2, e_3) + x_1\, y_3\, z_2 f(e_1, e_3, e_2) \\ &\quad + x_2\, y_1\, z_3 f(e_2, e_1, e_3) + x_2\, y_3\, z_1 f(e_2, e_3, e_1) \\ &\quad + x_3\, y_1\, z_2 f(e_3, e_1, e_2) + x_3\, y_2\, z_1 f(e_3, e_2, e_1) \end{aligned}$$

Mais $\begin{cases} f(e_1, e_3, e_2) = f(e_2, e_1, e_3) = f(e_3, e_2, e_1) = -f(e_1, e_2, e_3) \\ f(e_2, e_3, e_1) = f(e_3, e_1, e_2) = f(e_1, e_2, e_3) \end{cases}$

Finalement, on a :

$f(u_1, u_2, u_3) = (x_1\, y_2\, z_3 + x_2\, y_3\, z_1 + x_3\, y_1\, z_2 - x_1\, y_3\, z_2 - x_2\, y_1\, z_3 - x_3\, y_2\, z_1) f(e_1, e_2, e_3)$

Réciproquement, on constate que l'application φ définie sur E^3 par :

$$\begin{aligned} \varphi(u_1, u_2, u_3) &= \varphi(x_1e_1 + y_1e_2 + z_1e_3, x_2e_1 + y_2e_2 + z_2e_3, x_3e_1 + y_3e_2 + z_3e_3) \\ &= (x_1\, y_2\, z_3 + x_2\, y_3\, z_1 + x_3\, y_1\, z_2 - x_1\, y_3\, z_2 - x_2\, y_1\, z_3 - x_3\, y_2\, z_1) \end{aligned}$$

est une forme trilinéaire alternée sur E^3 et vérifie $\varphi(e_1, e_2, e_3) = 1$.

φ est appelée *application déterminant* dans la base (e).

Le calcul précédent montre que $\mathcal{A}_3(E, K)$ est une droite vectorielle et que pour toute forme trilinéaire alternée f sur E^3, on a $f = \lambda\varphi$ avec $\lambda = f(e_1, e_2, e_3)$.

On voit que φ est la seule forme trilinéaire alternée sur E^3 telle que $\varphi(e_1, e_2, e_3) = 1$.

13.2.2. Généralisation à la dimension n

Théorème et définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$.

L'application $f \;\rightarrow\; f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est un isomorphisme de $\mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})$ sur $\mathbb{K}$.

L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E^n est donc une droite vectorielle.

L'unique forme n-linéaire alternée φ telle $\varphi(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$ est appelée *application déterminant dans la base* (e) et notée $\mathrm{Det}_{(e)}$.

Pour toute forme n-linéaire alternée f sur E^n : $f = \lambda \mathrm{Det}_{(e)}$, avec $\lambda = f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Remarque

Si les vecteurs u_j s'écrivent $u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, e_i$, le déterminant de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ dans (e) s'écrit donc sous la forme d'une somme étendue à toutes les permutations σ de $\{1, \ldots, n\}$:

$$\mathrm{Det}_{(e)}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}$$

Cette forme développée (une somme de $n!$ termes) a essentiellement un intérêt théorique. Elle n'est jamais utilisée pour le calcul pratique des déterminants, en tout cas si $n \geq 4$.

Proposition *(relation entre deux applications "déterminant")*

Soient $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$ et $\varepsilon = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ deux bases de E.
Pour $u_1, u_2, \ldots, u_n$ dans E, on a :
$\mathrm{Det}_{(\varepsilon)}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathrm{Det}_{(\varepsilon)}(e_1, e_2, \ldots, e_n)\mathrm{Det}_{(e)}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Conséquence *(caractérisation des bases)*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$.
Soit $(\varepsilon) = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ une famille de n vecteurs de E.
La famille (u) est une base de E si et seulement si $\mathrm{Det}_{(e)}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \neq 0$.

13.3. Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice

13.3.1. Déterminant d'un endomorphisme

On rappelle que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

Proposition et définition

Soit f un endomorphisme de E, muni d'une base $(e) = e_1, e_2, \ldots, e_n$.
Le scalaire $\mathrm{Det}_{(e)}(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ ne dépend pas de la base (e).
On l'appelle le *déterminant* de l'endomorphisme f, et on le note $\det f$.

Propriétés immédiates

- Par définition, le déterminant d'un endomorphisme f est donc égal au déterminant dans la base (e) des images par f des vecteurs de (e), et ceci pour toute base de E.
- En particulier, le déterminant de l'application "identité" vaut 1.

  En effet ce déterminant est égal à $\mathrm{Det}_{(e)}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, pour une base (e) quelconque.
- Pour tout endomorphisme f, tous vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$, et toute base (e), on a :

  $\mathrm{Det}_{(e)}(f(u_1), f(u_2), \cdots, f(u_n)) = \det f\ \mathrm{Det}_{(e)}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Proposition *(Déterminant du composé de deux endomorphismes)*

Soient f et g deux endomorphismes de E. Alors $\det(g \circ f) = \det g\ \det f$.

Proposition *(Déterminant d'un automorphisme)*

Soit f un endomorphisme de E.

L'application f est un automorphisme si et seulement si son déterminant est non nul.

On a alors $\det f^{-1} = \dfrac{1}{\det f}$.

Proposition *(Déterminant des puissances d'un endomorphisme)*

Soit f un endomorphisme de E et p un entier naturel. Alors $\det(f^p) = (\det f)^p$.

Ce résultat se généralise aux exposants négatifs si f est un automorphisme.

13.3.2. Déterminant d'une matrice

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On appelle déterminant de A, et on note $\det A$, le déterminant de l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice est A dans la base canonique.

Propriétés

- Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.
- Le déterminant de la matrice identité est égal à 1 : $\det I_n = 1$.
- Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible $\iff \det A \neq 0$. On a alors $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.
- Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout entier naturel k, on a $\det A^k = (\det A)^k$.

  Si A est inversible, cette égalité s'étend au cas des entiers négatifs.
- Si les matrices carrées A et B sont semblables, alors elles ont le même déterminant.

Liens entre les différentes notions de déterminant

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base (e).

  Soit f un endomorphisme de E, de matrice A dans la base (e). Alors $\det A = \det f$.

  Autrement dit le déterminant d'une matrice est égal à celui de tout endomorphisme susceptible d'être représenté par cette matrice dans une certaine base.
- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, muni d'une base (e).

  Soit A la matrice dans la base (e) d'une famille $(u) = u_1, \ldots, u_n$ de n vecteurs de E.

  Alors $\det A = \mathrm{Det}_{(e)}(u_1, \ldots, u_n)$.
- Soient (e) et (ε) deux bases de E et soit P est la matrice de passage de (e) à (ε).

  Alors on a l'égalité : $\det P = \mathrm{Det}_{(e)}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$.

  Les applications "déterminant dans la base (e)" et "déterminant dans la base (ε)" sont reliées par l'égalité $\mathrm{Det}_{(e)} = \det P \, \mathrm{Det}_{(\varepsilon)}$.

  Ce résultat est conforme à l'égalité $[u]_e = P[u]_\varepsilon$ qui relie les coordonnées dans les bases (e) et (ε) d'un vecteur de E.

Proposition (Déterminant et tranposition)
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det A = \det {}^{\mathrm{T}}A$.

Conséquence
Toutes les propriétés des déterminants qui s'expriment en termes de colonnes peuvent également s'exprimer en termes de lignes.

13.4. Calcul des déterminants

13.4.1. Notations des déterminants

Notation
Soit A une matrice de terme général (a_{ij}).

Le déterminant Δ de A est noté $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Plus généralement, on appelera déterminant d'ordre n tout tableau Δ de la forme précédente, sans qu'il soit nécessaire de préciser son "origine" (matrice, famille de vecteurs, endomorphisme).

Déterminants d'ordre 1, 2 ou 3

- Pour tout scalaire a, on a bien sûr $|a| = a$ (ne pas confondre avec la valeur absolue...)
- Pour tous scalaires a, b, c, d : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.
- Pour tous scalaires $a, a', a'', b, b', b", c, c', c"$:

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = ab'c'' + bc'a'' + ca'b'' - a''b'c - b''c'a - c''a'b.$$

13.4.2. Propriétés calculatoires

Les propriétés des déterminants résultent de ce qui précède.
Soit Δ un déterminant d'ordre n. Dans la pratique, on commet souvent l'abus de langage de confondre le "tableau" Δ et la valeur qui lui est associée.
Les propriétés suivantes sont exprimées en termes de lignes. Elles pourraient être exprimées à l'identique en termes de colonnes.

- La valeur de Δ est linéaire par rapport à chaque colonne.

  En particulier, si on multiplie une colonne par λ, la valeur du déterminant est elle-même multipliée par λ.

  Si Δ contient une colonne nulle, alors la valeur de Δ est nulle.

- Si on permute deux colonnes de Δ, la valeur de Δ est changée en son opposé.

  Plus généralement, si on effectue une permutation sur les colonnes de Δ, la valeur de Δ est inchangée (resp. changée en son opposé) selon que cette permutation peut se décomposer en un nombre pair (resp. impair) d'échanges de colonnes.
- On ne modifie pas la valeur de Δ en ajoutant à l'une de ses colonnes une combinaison linéaire des autres colonnes de Δ.
- La valeur de Δ est nulle si et seulement si ses colonnes sont liées.

13.4.3. Développements d'un déterminant

Définition

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geq 2$, de terme général a_{ij}.

Pour tout couple d'indices (i, j), on appelle *mineur* de a_{ij} dans A (ou dans Δ), le déterminant Δ_{ij}, d'ordre $n-1$, obtenu en supprimant dans Δ la ligne et la colonne de a_{ij}.

La quantité $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ est appelée cofacteur du coefficient a_{ij}.

On appelle *comatrice* de A et on note $\operatorname{com} A$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de terme général A_{ij}.

Exemple

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}, \text{ alors } \operatorname{com} A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & a'' \\ c & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & a'' \\ b & b'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Proposition

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $n \geq 2$, de terme général a_{ij}.

Pour tout indice i de $\{1, \ldots, n\}$, on a : $\Delta = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$.

Cette égalité est appelée développement de Δ par rapport à sa i-ème ligne.

Pour tout indice j de $\{1, \ldots, n\}$, on a : $\Delta = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$.

Cette égalité est appelée développement de Δ par rapport à sa j-ème colonne.

Utilisation de la comatrice

- La proposition précédente peut sécrire :

  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A({}^{\mathrm{T}}\operatorname{com} A) = ({}^{\mathrm{T}}\operatorname{com} A)\, A = (\det A) I_n.$
- Si la matrice A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\,{}^{\mathrm{T}}\operatorname{com} A$.

  Cette formule n'a cependant qu'un intérêt assez théorique.
- Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

13.4.4. Déterminants particuliers

- *Déterminants triangulaires*

  Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, triangulaire (supérieure ou inférieure).

  Alors $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ (produit des coefficients diagonaux).

  Par exemple : $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{vmatrix} = aehj.$

- *Déterminants triangulaires par blocs*

  Soit A une matrice carrée triangulaire (supérieure ou inférieure) “par blocs”.

  Alors le déterminant de A est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux.

  Par exemple :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} a_{44} \begin{vmatrix} a_{55} & a_{56} \\ a_{65} & a_{66} \end{vmatrix}$$

- *Déterminants de Van Der Monde*

  Soit A une matrice carrée d'ordre n, de terme général $a_{ij} = x_i^{j-1}$.

  Alors le déterminant de A est égal à $\prod_{i<j}(x_j - x_i)$.

  Exemple : $\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = (z-y)(z-x)(z-w)(y-x)(y-w)(x-w)$