-aculte de génie électrique — USTHB 2001 / 2002
dep. d'info
2: année section B.

# Series de Fourier.

## Exercice n° 1 :

a/. Determiner la série de Fourier de la fonction $2\pi$-périodique égale à $|x|$ sur l'intervalle $]-\pi, +\pi]$. Etudier la convergence

b/. En déduire les relations suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

## Exercice n° 2 :

a/. Developper en série de Fourier la fonction $2\pi$-périodique définie sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\pi, 0] \\ 1 & \text{si } x \in ]0, \pi] \end{cases}$$

b/. Etudier la convergence, en déduire le valeurs des sommes de séries numériques suivantes:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^2}.$$

## Exercice n° 3 :

Soit $f$ la fonction 2- periodique égale à $x^2$ sur $[-\pi, \pi[$

a/. Determiner sa sé de Fourier, et donner la somme de la série pour tout $x$ réel

b/. retrouver relation $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$..

## Exercic 4 :

$f$ la fonction paire $2T$-périodique définie sur $[0, T]$ par ;

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{T} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{T}{2} \leq x \leq T. \end{cases}$$

Determiner le developpement en série de Fourier de cette fonction et dire quels sont ses domaines de convergence.

# Séries de Fourier

**Définition :**

Soit $f$ une fonction $T$ périodique, intégrable sur $\mathbb{R}$. On appelle série de Fourier associée à $f$ la série de fonctions définie par

$$A_0 + \sum_{n \geq 1} A_n \cos n\omega x + B_n \sin n\omega x$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T} = $ (fréquence)

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt}$$ ( ~~En~~ réalité on omet le terme $B_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin 0t = 0$ )

$$\boxed{A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt} \; ; \; \boxed{B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt}$$

Rmq 1) Si $f(t)$ est paire $\Rightarrow$ $f(t)\cos n\omega t$ est paire et $f(t)\sin n\omega t$ impaire

Soit : $B_n = 0$ et $A_n = 2 \cdot \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos n\omega t\,dt$

2) Si $f$ est impaire $\Rightarrow$ $f(t)\cos n\omega t$ est impaire et $f(t)\sin n\omega t$ paire

Soit $A_n = 0$ et $B_n = 2 \cdot \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin n\omega t\,dt$.

## Convergence de la série de Fourier

Théorème de Dirichlet Soit $f$ une fonction $T$ périodique
Si $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points $(x_i)$
et $f$ est dérivable " " " " " " " " " "
et en $x_i$ ① $\lim_{x \overset{>}{\to} x_i} f(x_i)$ notée $f(x_i^+)$ $\exists$

② $\lim_{x \overset{<}{\to} x_i} f(x_i)$ notée $f(x_i^-)$ $\exists$

③ $\lim_{x \overset{>}{\to} x_i} \frac{f(x) - f(x_i^+)}{x - x_i}$ $\exists$

④ $\lim_{x \overset{<}{\to} x_i} \frac{f(x) - f(x_i^-)}{x - x_i}$ $\exists$

Alors la série de Fourier est convergente simplement vers

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \frac{1}{2}\left(f(x_i^+) + f(x_i^-)\right) & \text{si } f \text{ est discontinue en } x_i \end{cases}$$

On dit alors que $f$ est développable en série de Fourier.

Rmq Le Théorème ne donne que la Convergence Simple.

Exple Soit $f$ une fonction $2\pi$ périodique définie par $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$

1) Ecrire la série de Fourier associée à $f$

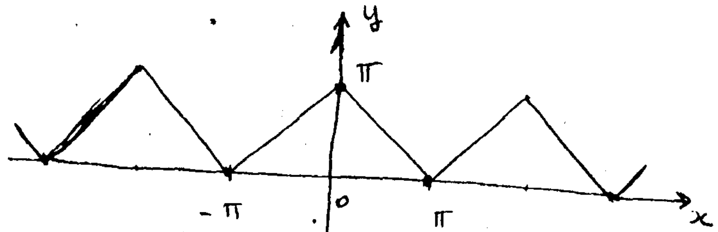
2) Etudier la convergence de cette série de Fourier.

3) En déduire la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$

Réponse

1) $f$ est périodique de période $2\pi$.

graphe de $f$




$f$ est continue sur $[0, \pi]$ donc sur $\mathbb{R}$ car périodique et paire

## Définition ①

Soit $f$ une fonction intégrable sur IR. On dit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est finie.

## Définition ②

On dit que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge absolument si $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge.

## Transformée de Fourier

Soit $f$ une fonction de IR dans l'ensemble des complexes $\mathbb{C}$, dont l'intégrale sur IR converge absolument. On appelle série de Fourier et on note $\mathcal{F}(f)$ l'intégrale:

$$\mathcal{F}(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-itx}\, dt.$$

**Rmq** $\mathcal{F}$ est linéaire:

$$\mathcal{F}(f+g) = \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$$

$$\mathcal{F}(\alpha f) = \alpha \mathcal{F}(f)$$

**Théorème** si $\mathcal{F}(f(x))\, e^{itx}$ est intégrable sur IR et $f$ continue sauf en un nombre fini de pts $(x_i)$ et $\lim_{x \overset{>}{\to} x_i} f(x_i)$ $\exists$ et $\lim_{x \overset{<}{\to} x_i} f(x_i)$ $\exists$.

$f$ dérivable en dehors de $x_i$, prolongeable à une fonction dérivable sur IR alors :



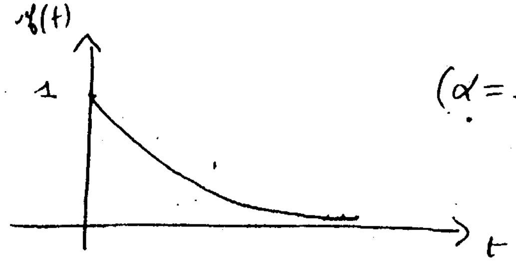
$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}$ … $dt$ si $f$ est continue à

et $\frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x_-)\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f(t))\, e^{itx}\, dt.$

si $f$ est continue à droite et à gauche de $x$

**Exple**

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \qquad \alpha > 0$$




$(\alpha = 1)$

Déterminons la transformée de Fourier de $f$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt = \left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \lim_{t \to +\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right) - \left(-\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}$$ fini on peut

donc écrire la transformée de Fourier:

$$\mathcal{F}(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-itx}\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\, e^{-itx}\, dt = \frac{1}{\alpha + ix}\left[e^{-(\alpha + it)x}\right]_0^{+\infty}$$

$$\boxed{\mathcal{F}(f(x)) = \frac{1}{\alpha + ix}}$$

$f$ st périodique intégrable on peut donc écrire la série de Fourier associée à $f$ :

$$A_0 + \sum_{n \geq 1} A_n \cos n\omega x + B_n \sin n\omega x \ , \ \omega = \frac{2\pi}{T} = 1 .$$

$f$ st paire $\Rightarrow B_n = 0$ et $A_n = 2 \cdot \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt = -\frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos n\pi}{n^2}$

$$A_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ \frac{-4}{\pi(2p+1)^2} & \text{si } n = 2p+1 \end{cases} ; \quad A_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \, dt = \frac{\pi}{2} .$$

soit :
$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x$$

2) si $f$ vérifie le ~~théorème~~ théorème de Dirichlet alors la série de Fourier de $f$ st CVS. $f$ étant paire et périodique il suffit de vérifier le théorème de Dirichlet sur $[0, \pi]$.

$f$ st continue sur $[0, \pi]$. $f$ st dérivable sur $]0, \pi[$.

aux pts $x_0 = 0$ et $x_0 = \pi$ $f$ admet des dérivées à gauche et à droite.

$f$ vérifie alors le théorème de Dirichlet ~~on~~ a alors :

La série de Fourier de $f$ CVS vers $S(x)$.

$S(x) = f(x)$ , $x \in \mathbb{R}$ (car $f$ continue sur $\mathbb{R}$)

Rmq si $x \in [-\pi, \pi]$ $S(x) = |x|$

CVN la série de Fourier ; $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum U_n(x)$ où $U_n(x) = \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x$

$|U_n(x)| \leq \frac{1}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{n^2}$ ; $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV $\Rightarrow \sum_{n \geq 0} U_n(x)$ CVN

d'où la convergence normale de la série de Fourier $\Rightarrow$ La série de Fourier CV Absolument et uniformément.



3) $x = 0 \in [-\pi, \pi] \Rightarrow 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$

$$\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} .$$

**Égalité de Parseval** soit $f$ une fonction $T$ périodique. si $f$ st développable en série de Fourier et que sa série de Fourier cv uniformément alors on a :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) \, dt = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} A_n^2 + B_n^2$$

appelée égalité de Parseval.

Dem

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, (f(t)) \, dt$$

or $f$ st développable en série de Fourier soit :

$$f(t) = A_0 + \sum_{n \geq 1} A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t \quad \text{et on a ;}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \left[ A_0 + \sum_{n \geq 1} A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t \right] dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, A_0 \, dt + \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n \geq 1} f(t) (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \, dt$$

$A_0$ ne dépend pas de $t$ ; La série de Fourier de $f$ cv uniformément

$$= A_0 \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T f(t) \, dt}_{A_0} + \frac{1}{T} \sum_{n \geq 1} \int_0^T f(t) (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \, dt$$

$A_n$, $B_n$ ne dépendent pas de $t$,

$$= A_0^2 + \frac{1}{T} \sum_{n \geq 1} \left[ A_n \int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt + B_n \int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt \right]$$

$$= A_0^2 + \sum_{n \geq 1} \left[ A_n \times \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt}_{\frac{1}{2} A_n} + B_n \times \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt}_{\frac{1}{2} B_n} \right]$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) \, dt = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} A_n^2 + B_n^2 .$$