Matrices et applications linéaires
notes de cours MIAS1

H. Le Ferrand

May 7, 2001

Contents

1 Produits de matrices

1.1 Définition

Soit $A = (\alpha_{ij}) \in K^{p\times n}$, $B = (\beta_{ij}) \in K^{n\times q}$, on définit alors **la matrice produit** :

$$AB = (\gamma_{ij}) \in K^{p\times q} \text{ où } \gamma_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \alpha_{il}\beta_{lj},\ 1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q. \tag{1}$$

Remarque 1.1 On a en fait:

$$\gamma_{ij} = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}) \begin{pmatrix} \beta_{1j} \\ \vdots \\ \beta_{nj} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

1.2 Propriétés du produit

a) Si les formats le permettent (!), on l'associativité :

$$(AB)C = A(BC). \tag{3}$$

Démonstration 1.2 Si $A \in K^{p\times n}$, $B \in K^{n\times q}$ et $C \in K^{q\times s}$,

$$\begin{aligned}
((AB)C)\, ij &= \sum_{l=1}^{q} (AB)_{il}(C)_{lj} && (4)\\
&= \sum_{l=1}^{q} \left(\sum_{t=1}^{n} (A)_{it}(B)_{tl} \right) (C)_{lj} && (5)\\
&= \sum_{t=1}^{n} (A)_{it} \sum_{l=1}^{q} (B)_{tl}(C)_{lj} && (6)\\
&= \sum_{t=1}^{n} (A)_{it}(BC)_{tj} && (7)\\
&= (A(BC))\, ij && (8)
\end{aligned}$$

b) Si $B \in K^{p\times n}$, $A_1, A_2 \in K^{n\times q}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, alors

$$B(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = \lambda_1 BA_1 + \lambda_2 BA_2. \tag{9}$$

c) Si $A \in K^{p\times n}$, $B \in K^{n\times q}$, alors

$$(AB)^T = B^T A^T \ (\in K^{q\times p}). \tag{10}$$

d) L'ensemble des matrices carrées $n \times n$ muni de + et × est un anneau, délḿent neutre la matrice identité

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

On prendra garde, dès que $n > 1$, cet anneau est non commutatif et non intègre.

1.3 L'application $x \mapsto Ax$

Les vecteurs sont notés en colonnes, on considère une matrice $A \in K^{p\times n}$ et on lui associe l'application $K^n \to K^p$, $x \mapsto Ax$ ($A = (\alpha_{ij})$, que l'on note encore A.

1.3.1 linéarité

Cette application est linéaire de K^n dans K^p :

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay. \tag{12}$$

1.3.2 coordonnées

On remarque que la j-ième colonne de A est Ae_j où $e_j = (0, \dots, O, 1, 0, \dots, 0)^T \in K^{n\times 1}$ où le 1 se trouve au j-ième rang.

Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n et $(f_1, \dots, f_p)$ la base canonique de K^p. On constate que $Ae_i = \sum_{l=1}^{p} \alpha_{li} f_l$. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$, les x_i sont les coordonnées de x sur la base $(e_1, \dots, e_n)$. Si $y = Ax = (y_1, \dots, y_p)$, les y_i sont les coordonnées de Ax, i.e du vecteur image, dans la base $(f_1, \dots, f_p)$. On généralisera cela plus loin : si x est un vecteur donné, les coordonnées de x dans une base fixée étant données, les coordonnées du vecteur image dans la seconde base fixée s'obtiennent par une multiplication matricielle.

1.3.3 noyau

On pose

$$\ker A = \{x \in K^n \ / \ Ax = 0\}. \tag{13}$$

Ce n'est rien d'autre que l'ensemble des solutions du système homogène associé à A. Ainsi $\ker A$ est un sous espace vectoriel de K^n de dimension $n - rangA$.

exercice 1 Vérifier que A est injective si et seulement si $\ker A = \{0\}$.

1.3.4 image

On pose

$$ImA = \{y \in K^p \ / \ \exists x \in K^n \ y = Ax\}. \tag{14}$$

Si $A = (c_1, \dots, c_n)$, $Ax = x_1c_1 + \cdots x_nc_n$ donc $ImA = S(c_1, \dots, c_n)$. Ainsi ImA est un sous espace vectoriel de K^p de dimension le rang de A.

Théorème 1.3 (Théorème du rang version 2) Si $A \in K^{p\times n}$,

$$\dim \ker A + rangA = n. \tag{15}$$

1.3.5 matrice inversible

Définition 1.4 Soit A une matrice carrée $n \times n$, on dit que A est inversible si et seulement si il existe $B \in K^{n\times n}$ telle que $AB = BA = I_n$. La matrice B est alors unique et on la note A^{-1}.

Caractérisons les matrices inversibles :

- si A inversible, le système $Ax = 0$ a pour seule solution 0 : $A^{-1}(Ax) = A^{-1} \times 0$, soit $x = 0$. Ainsi $rangA = n$, i.e $\dim ImA = n = \dim K^n$, d'où $ImA = K^n$.

  Conclusion 1.5 Si A est inversible l'application linéaire $x \mapsto Ax$ est surjective et injective donc bijective. L'équation $Ax = y$ admet une et une seule solution, i.e $x = A^{-1}y$.

- Supposons A de rang maximum, i.e $rangA = n$. Le système $Ax = y$, y donné dans K^n admet une et une seule solution. Cette solution s'exprime matriciellement : il existe $B \in K^{n\times n}$ telle que $Ax = y$ si et seulement si $x = By$. On a $A(By) = y$ pour tout y et $B(Ax) = x$ pour tout x, i.e $AB = BA$.

  Conclusion 1.6 $A \in K^{n\times n}$, A est inversible

$$\iff rangA = n \tag{16}$$

$$\iff \ker A = \{0\}\,. \tag{17}$$

Remarque 1.7
- soit $A \in K^{n\times n}$ et supposons qu'il existe $B \in K^{n\times n}$ telle que $BA = I_n$. Alors A est inversible ! (si $Ax = 0$, $B(Ax) = 0$,...)
- soit $A \in K^{n\times n}$ et supposons qu'il existe $B \in K^{n\times n}$ telle que $AB = I_n$. Alors A est inversible ! (si $y \in K^n$, $y = ABy = A(By)$, ...)

Moralité, pour une matrice carrée, l'inversibilité à gauche équivaut à l'inversibilité à droite.

exercice 2 On note $GL_n(I\!R)$ l'ensemble des matrices inversibles réelles $n \times n$. Montrer que $(GL_n(I\!R), \times)$ est un groupe.

exercice 3 Soit T une matrice triangulaire supérieure. A quelle condition T est-elle inversible ?

2 Applications linéaires

2.1 Définition et exemples

Soit V et W deux K espaces vectoriels. On dit que l'application $T : V \to W$ est linéaire (ou que T est une application linéaire) si

$$\forall v_1, v_2 \in V \;\; T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \tag{18}$$

et

$$\forall \alpha \in K \;\; forallv \in V \;\; T(\alpha v) = \alpha T(v). \tag{19}$$

Exemple 2.1 Toute application linéaire T de $I\!R^n$ to $I\!R$ est de la forme

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \tag{20}$$

où les α_i sont fixés.

Exemple 2.2 Soit $T : I\!R^n \to I\!R^p$. Introduisons l'application $p_i : I\!R^n \to I\!R$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$, puis regardons $p_i \circ T$...

Exemple 2.3 $I : C(I\!R) \to I\!R$, $f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$.

Exemple 2.4 $D : I\!R[x] \to I\!R[x]$, $f \mapsto D(f) = f'$.

2.2 Opérations

2.2.1 Somme

Soit $S, T : V \to W$, deux applications linéaires, on définit :

$$S + T : V \to W,\ v \mapsto (S+T)(v) = S(v) + T(v). \tag{21}$$

Alors, $S + T$ est linéaire.

2.2.2 Produit par un scalaire

Soit $T : V \to W$ linéaire, on définit :

$$\alpha T : V \to W,\ v \mapsto (\alpha T)(v) = \alpha T(v). \tag{22}$$

Vérifier que $\mathbf{L}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) := \{$applications linéaires de $\mathbf{V}$ dans$\mathbf{W}\}$ est un K-espace vectoriel.

2.2.3 Composition (ou produit)

Soit $V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{S} Z$ des applications linéaires. Alors $S \circ T : V \to Z$ est linéaire. On notera $S \circ T$ par ST.

Remarque 2.5 Faisons une remarque importante : dans le cadre général d'applications (non ncéssairement linéaire) de V dans V, on n'a pas $f \circ (h + g) = f \circ h + f \circ g$. **Par contre**, si S, T, U sont dans $L(V, V)$, $S(T + U) = ST + SU$.

<u>**exercice**</u> **4** Vérifier que $(L(V), +, \circ)$ est un anneau.

2.3 Isomorphismes

Définition 2.6 L'application linéaire $T : V \to W$ est appelée **isomorphisme** s'il existe une application linéaire S d e W dans V telle que $TS = id_W$ et $ST = id_V$.

En fait on a :

Proposition 2.7 T est un isomorphisme si et seulement si T est bijectif.

Démonstration 2.8 Si T est bijectif, l'existence de T^{-1} est acquise, il faut en vérifier la linéarité ...

Définition 2.9 S'il existe un isomorphisme de V sur W on dit que V et W sont isomorphes.

Exemple 2.10 Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Montrons que V est isomorphe à $\mathbb{R}^3$.

Exemple 2.11 Peut-il y avoir un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^3$?

2.4 Thérorème du rang version 3

On considère ici deux K-espace vectoriels, V et W de dimension finie.

Théorème 2.12 (**Théorème du rang**) Soit $T \in L(V, W)$, alors

$$\dim \ker T + \dim ImT = \dim V$$

Démonstration 2.13 On rappelle que $\ker T = \{v \in V \ / \ T(v) = 0\}$ et $ImT = \{w \in W \ / \ \exists v \in V \ \ w = T(v)\}$. Considérons une base $(v_1, \ldots, v_p)$ de $\ker T$ que l'on complète par $(v_{p+1}, \ldots, v_n)$ en une base de V. On montre alors que $(T(v_{p+1}), \ldots, T(v_n))$ est une base de ImT...

On en déduit le résultat important

Corollaire 2.14 Si $\dim V < +\infty$ et si $T \in L(V)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) T est un isomorphisme.

(b) T est injectif.

(c) T est surjectif.

3 Matrices et endomorphismes en dimension finie

3.1 Détermination d'une application linéaire

On a déjà remarqué que si $\dim V < +\infty$, **connaître** une application linéaire $T : V \to W$ c'est **connaître** les images des vecteurs d'une base de V (si $v = \sum \alpha_i v_i$, $T(v) = \sum \alpha_i T(v_i)$).

De plus si $\dim V = n$ avec $(v_1, \ldots, v_n)$ base de V, et si $w_1, \ldots, w_n$ sont des vecteurs quelconques de W, il existe une et une seule application linéaire T de V dans W telle que $T(v_i) = w_i$ pour $i = 1 \ldots n$.

3.2 Matrice d'un endomorphisme de V, $\dim V = n$.

3.2.1 Définition

Pour plus de simplicité nous nous intéresserons qu'à des **endomorphismes** de V (i.e des applications linéaires de V dans V).

Définition 3.1 Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V et $u \in L(V)$, la matrice de u relativement à la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est la matrice $n \times n$ A dont la j-ième colonne est formée des coefficients de $u(e_j$ sur la base $(e_1, \ldots, e_n)$:

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i, \ A = (\alpha_{ij}). \tag{23}$$

soit

$$A = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{array} \right) & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \ddots \\ e_n \end{array} \\ u(e_j) & \end{array} \tag{24}$$

Exemple 3.2

$$\left\{\begin{array}{lll} u(e_1) & = & 2e_1 - 3e_3 \\ u(e_2) & = & e_2 + 5e_3 \\ u(e_3) & = & e_1 - e_2 \end{array}\right.$$

3.2.2 Calcul de $u(x)$

Soit $x = x_1e_1 + \cdots x_ne_n$, alors on a

$$u(x) = x_1u(e_1) + \cdots x_nu(e_n) = y_1e_1 + \cdots y_ne_n.$$

Puis

$$\begin{array}{lll} \sum_{j=1}^n x_ju(e_j) & = & \sum_j \sum_i \alpha_{ij}e_i \\ & = & \sum_i \left(\sum_j \alpha_{ij}x_j\right) e_i. \end{array} \tag{25}$$

Ainsi on que $y_i = \sum_j \alpha_{ij}x_j$, i.e

Conclusion 3.3 La base $(e_1, \ldots, e_n)$ étant fixée ,

$$u \longleftrightarrow A \tag{26}$$

$$x \longleftrightarrow (x_1, \ldots, x_n)^T \tag{27}$$

$$y = u(x) \longleftrightarrow (y_1, \ldots, y_n)^T \tag{28}$$

et

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{29}$$

3.3 Lien avec les opérations

Proposition 3.4 Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base finie de V et f, g dans $L(V)$. On suppose que $f \longleftrightarrow A = (\alpha_{ij})$ et $g \longleftrightarrow B = (\beta_{ij})$.

On a alors :

$$f + g \longleftrightarrow A + B \tag{30}$$

$$\alpha f \longleftrightarrow \alpha A \ (\alpha \in K) \tag{31}$$

$$fg(= f \circ g) \longleftrightarrow AB \tag{32}$$

Démonstration 3.5 Montrons le dernier point. Il suffit de calculer $(fg)(e_j)$:

$$(fg)(e_j) = f(g(e_j) \quad = \quad f\left(\sum_{i=1}^n \beta_{ij}e_i\right) \tag{33}$$

$$= \sum_{i=1}^n \beta_{ij}f(e_i) \tag{34}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} \left(\sum_{k}^{n} \alpha_{ki} e_k \right) \tag{35}$$

$$= \sum_{k}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \beta_{ij} \right)}_{(AB)_{kj}} e_k \tag{36}$$

ce qu'il fallait démontrer.

3.4 Changement de base

Suppososns que $\dim V = n$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V. Soit $(e'_1, \ldots, e'_n)$ **une nouvelle base** de V :

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} \theta_{ij} e_i. \tag{37}$$

Considérons la matrice

$$P = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & \theta_{1j} & \\ & \theta_{2j} & \\ & \vdots & \\ & \theta_{nj} & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \ddots \\ e_n \end{array} \\ e'_j & \end{array} \tag{38}$$

P est appelé **matrice de passage** de $(e_1, \ldots, e_n)$ à $(e'_1, \ldots, e'_n)$.

Lemme 3.6 La matrice P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de $(e'_1, \ldots, e'_n)$ à $(e_1, \ldots, e_n)$.

Démonstration 3.7 Si $e_j = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} e'_i$, on a alors

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} \theta_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{n} \theta_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} \gamma_{ki} e'_k \right) \tag{39}$$

$$= \sum_{k=1} \left(\sum_{i=1}^{n} \theta_{ij} \gamma_{ki} \right) e'_k \tag{40}$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{ki} \theta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases} \tag{41}$$

soit $(\gamma_{ki})(\theta_{ij}) = I$!

On a alors les résultats suivants :

Proposition 3.8 Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ (**ancienne base**) et $(e'_1, \ldots, e'_n)$ (**nouvelle base**), et x un vecteur quelconque de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ relativement à $(e_1, \ldots, e_n)$ et $(x'_1, \ldots, x'_n)$ relativement à $(e'_1, \ldots, e'_n)$. Alors on a:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \tag{42}$$

i.e les anciennes coordonnées s'expriment en fonction des nouvelles.

Démonstration 3.9 Il suffit de voir que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i = \sum_i x'_i \sum_j \theta_{ji} e_j \tag{43}$$

$$= \sum_j \left(\underbrace{\sum_i \theta_{ij} x'_i}_{=x_j} \right) e_j \tag{44}$$

Proposition 3.10 Soit $u \in L(V)$,

$$u \longleftrightarrow A \ (e_1, \ldots, e_n) \tag{45}$$

$$v \longleftrightarrow B \ (e'_1, \ldots, e'_n) \tag{46}$$

alors $B = P^{-1}AP$.

Démonstration 3.11 Si $y = u(x)$,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \tag{47}$$

d'où

$$P \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = AP \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \tag{48}$$

ainsi

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \ldots \tag{49}$$