

Probabilités et Statistiques

EPREUVE DE MOYENNE DUREE

Exercice 1 : 6

1: Une urne U 1 contient 2 jetons numérotés 1 et 2. Une urne U 2 contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4.

On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne. (Les choix sont supposés équiprobables).

a: Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1?

b: On a tiré un jeton portant le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U 1 ?

2: On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents.

On tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables.

a: Calculez la probabilité de tirer 2 jetons identiques.

b: Soit S la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe la somme des numéros des 2 jetons tirés. Précisez les valeurs possibles pour S et établissez sa loi de probabilité.

c: Calculez l'espérance de S.

Exercice 2 : 8

Un joueur lance deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose que les dés sont non-truqués et donc que pour chaque dé, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition.

Le joueur suit les règles suivantes:

- Si les deux dés donnent le même numéro alors le joueur perd 10 points

- Si les deux dés donnent deux numéros de parités différentes (l'un est pair et l'autre impair) alors il perd 5 points.

- Dans les autres cas il gagne 15 points.

Le joueur joue une partie et on note X la variable aléatoire correspond au nombre de points obtenus par lui.

a. Déterminez la loi de probabilité de X puis calculez l'espérance de X.

b. Représentez graphiquement la fonction de répartition de X.

Le joueur effectue 10 parties de suites. Les résultats des parties sont indépendants les uns des autres.

On appelle alors Y la variable aléatoire égale au nombre de fois que le joueur gagne 15 points.

c. Expliquez pourquoi Y suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de Y?

d. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une fois 15 points?

e. Combien de fois le joueur peut espérer gagner 15 points?

Le joueur joue n parties de suite.

f. Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une fois 15 points?

g. A partir de quelle valeur de n sa probabilité de gagner au moins une fois 15 points est strictement supérieure à 0,9999 ?

Exercice 3 :

Au cours d'une foire foraine, l'animateur d'un stand dispose, dans un enclos, de douze cages peintes:

sept sont blanches, deux noires et les trois autres vertes.

L'animateur place alors une souris dans l'enclos. On suppose qu'à chaque jeu, la souris choisit d'entrer au hasard dans une cage et que tous les choix sont équiprobables.

Un joueur participe au jeu. Le règlement du jeu est le suivant:

- Si la souris entre dans une cage blanche, le joueur perd;
- Si la souris entre dans une cage noire, le joueur gagne,
- Si la souris entre dans une cage verte, l'animateur remet la souris dans l'enclos;
si la souris entre alors dans une cage noire, le joueur gagne sinon il perd.

On suppose que le choix de la deuxième cage est indépendant du choix de la première.

En s'aidant d'un arbre :

1. Montrez que la probabilité de l'événement " le joueur gagne " est : $\frac{5}{24}$.

2. Un joueur possède 10 Dinars qu'il verse pour participer à une partie. S'il gagne, il reçoit k Dinars; sinon, il ne reçoit rien.

Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur la somme que possède le joueur après la partie.

a: Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

b: Calculez, en fonction de k , l'espérance mathématique $E[X]$ de la variable aléatoire X .

c: Quelle valeur faut-il donner à k pour que le jeu soit équitable?

(c'est à dire pour que ce joueur puisse espérer posséder 10 Dinars à la fin de la partie)

EXERCICE n°1:

1:

a: La probabilité de tirer un jeton portant le numero 3 est:

$$P("3") = P("3") \times P(U_1) + P_{U_2}("3") \times P(U_2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} = 0.375$$

b: On cherche la probabilité d'avoir choisit l'urne U_1 , sachant que le jeton tiré porte le numero 3, à savoir: $P_{U_1}("3")$

$$P_{U_1}("3") = \frac{P(U_1 \cap "3")}{P("3")} = \frac{P_{U_1}("3") \times P(U_1)}{P("3")}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$$

2: On tire 2 jetons parmi 6 simultanément. Le nbr de tirages possibles est donc: $C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = 15$

a: Il y'a 2 façons d'obtenir 2 jetons portant le m^{ême} numero à savoir 1 ou 2.

La probabilité demandée est donc $\frac{2}{15}$.

b: Les valeurs que peut prendre S sont: 2, 3, 4, 5, 6, 7.
Loi de probabilité:

$S=k$	2	3	4	5	6	7
$P(S=k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

Détails:

• On a $S=2$ pour le tirage des 2 jetons portant le numero 1.
donc: Probabilité cherchée = $\frac{\text{nbr de combinaisons de 2 jetons portant le numero 1}}{\text{nbr de tirages de 6 jetons 2 à 2}}$

$$= \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$$

• On a $S=3$ pour le tirage d'un numero 1 et d'un numero 2
 $P(S=3) = P(1 \text{ jeton portant le numero 1 et } 1 \text{ jeton portant le numero 2})$

$P(S=3) = \frac{(\text{nbr de combinaison de 2 jetons portant le n° 1 (1 à 3)) (\text{nbr de comb. de 2 jetons portant le n° 2})}{\text{nbr de combinaison de 6 jetons 2 à 2}}$

nbr de combinaison de 6 jetons 2 à 2 :

$$= \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_6^2} = \frac{2 \times 2}{15} = \frac{4}{15}$$

• On a : $S=4$ pour le tirage d'un numéro 1 et d'un numéro 3 ou deux numéros 2 :

$$P(S=4) = P(1 \text{ jeton numéro 1 et 1 jeton numéro 3}) + P(2 \text{ jetons } 2) \\ = \frac{C_2^1 C_1^1}{C_6^2} + \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} \quad \text{et on continue ainsi}$$

On vérifie que $\sum P(S=k) = 1$:

• L'espérance de S est : $E(S) = \sum P(S=k) \cdot k = \frac{65}{15} = \frac{13}{3}$

EXERCICE N° 2 :

• L'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow \text{car } \Omega = 6^2 = 36$

• ~~car~~ on suppose qu'il y a équiprobabilité des résultats des - on a alors :

Pour tout événement A de Ω $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

a - La variable aléatoire X peut prendre les valeurs $-10, -5, 1$

L'événement " $X = -10$ " est l'événement "obtenir le même numéro" c'est

donc l'événement $A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$:

La proba de $X = -10$ est donc : $P(X = -10) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

de même l'événement " $X = -5$ " est l'événement "obtenir 2 numéros de p

c'est donc l'ensemble des couples (a,b) tq a soit dans $\{1, 3$

et b soit dans $\{2, 4, 6\}$ ou bien a soit dans $\{2, 4, 6\}$ et b dans

le cardinal de cet événement est donc : $3 \times 3 + 3 \times 3 = 18$

D'où : $P(X = -5) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

On en déduit :

$$P(X \leq 15) = 1 - P(X = -10) - P(X = -5)$$

$$= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$X \leq k$	-10	-5	15
$P(X \leq k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$$E(X) = \sum P(X \leq k) \cdot k = \frac{5}{6}$$

b - la fonction de répartition de X est :

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

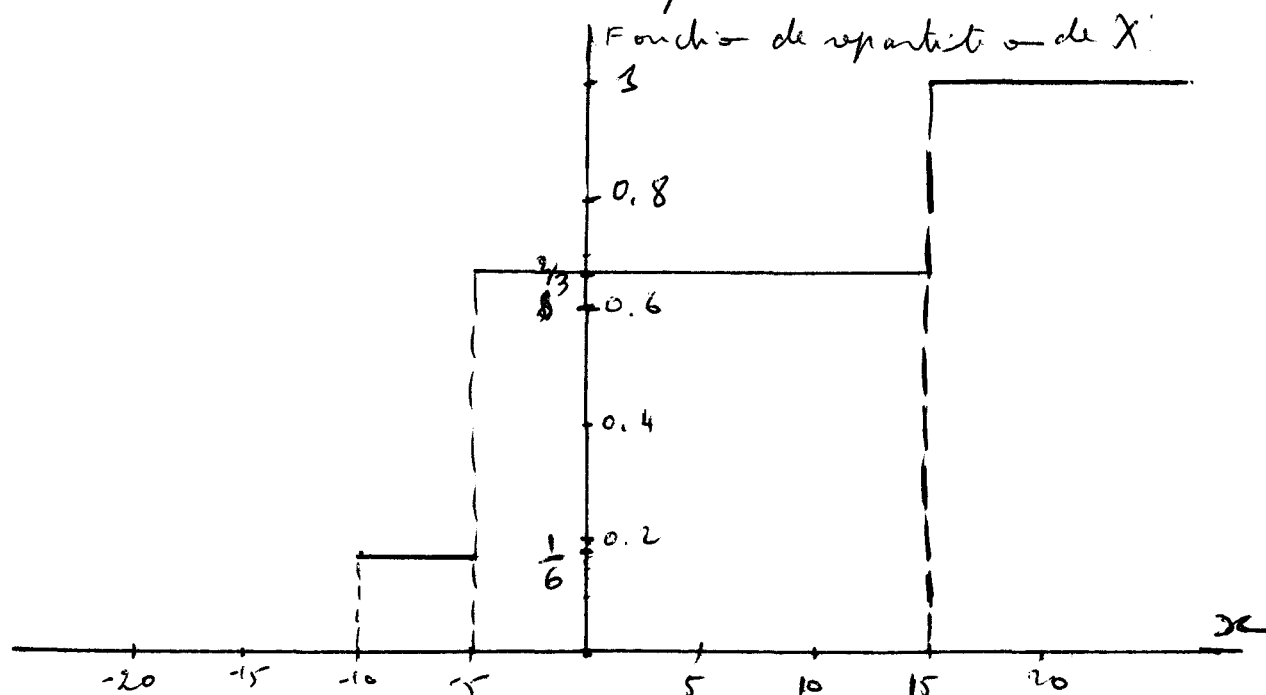
$$\text{Si } x < -10 \rightarrow F(x) = 0$$

$$-10 \leq x < -5 \rightarrow F(x) = \frac{1}{6}$$

$$-5 \leq x < 15 \rightarrow F(x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$x \geq 15 \rightarrow F(x) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1$$

D'où la courbe de la fonction de répartition de X :



c : Si le joueur effectue 10 parties de suite dont les résultats sont indépendants les uns des autres, la proba pour chaque partie d'obtenir 15 pts est constante $= \frac{1}{3}$. on peut dire que la variable aléatoire Y est égale au nbr de fois que le joueur gagne 15pts en 10 parties suit une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{1}{3}$.

Y suit donc la loi $B(n=10, p=\frac{1}{3})$.

$$P(Y=k) = C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{10-k}$$

d: la proba. pour que le joueur gagne au moins une fois 15 ps

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \frac{58025}{59049} \approx 0.9826$$

e: ~~La proba. pour que le~~

$$E(X) = n \cdot p = 10 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

$$f: P(Z \geq 1) = 1 - P(Z=0) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$g: P(Z \geq 1) = 0.9999 \Rightarrow 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq 0.9999$$

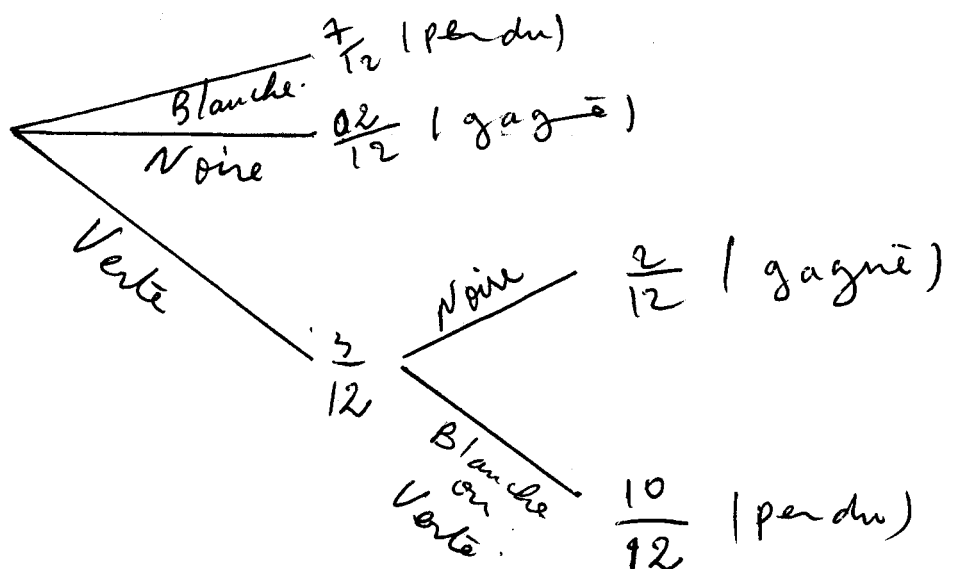
$$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n < 0.0001 \Rightarrow n \log \frac{2}{3} < \log(0.0001)$$

$$\Rightarrow n > \frac{\log 0.0001}{\log \left(\frac{2}{3}\right)} \Rightarrow n > 23 \text{ (car } n \text{ est entier)}$$

le joueur a donc une proba. de gagner au moins
une fois 15 ps supérieure à 0.9999 s'il joue au moins
23 parties de suite.

EXERCICE N° 3:

L'arbre suivant résume la situation



$P(\text{"le joueur gagne"}) = P(\text{"La souris choisit l'axe noire" ou "la souris choisit l'axe Vert et l'axe Noire en 2^{ème} cho"})$
Soient:

- N : l'événement "La souris choisit l'axe Noire"
- B : " " " " " " " " " Blanche"
- V : " " " " " " " " " Vert"
- G : " le joueur gagne.

La proba de "A" et "B" si A et B sont deux événements indépendants, et :

$$P(A \text{ et } B) = P(A) \cdot P(B)$$

donc :

$$\begin{aligned} P(G) &= P(N) + P(V \text{ et } N) \\ &= P(N) + P(V) \cdot P(N) \\ &= \frac{2}{12} + \frac{3}{12} \times \frac{2}{12} = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

2 - La Variable aléatoire X (correspondant à la somme que possède le joueur après la partie peut prendre les valeurs 0 ou $(k-10)$)

$$a - P(X=0) = P(\bar{G}) = 1 - P(G) = \frac{19}{24}$$

$$P(X, k-10) = P(G) = \frac{5}{24}$$

$$\begin{aligned} b: E(X) &= P(X \leq 0) \cdot 0 + P(X \leq k-10) (k-10) \\ &= \frac{5}{24} (k-10) \end{aligned}$$

C: La partie est équilibrée si l'espérance de X est égale à 0 On doit donc avoir : $\frac{5}{24} (k-10) = 0 \Rightarrow k = 58$